MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHETEDIK ÉVFOLYAM

I. FÜZET 1908 JANUÁRIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1908

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhetedik társulati év 1908 január 1-jén kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czimére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

TIZENHETEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1908

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-ÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENHETEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

★

Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Önálló és ismertető czikkek.

Physikai Laboratorium.

Irodalom.

Társulati ügyek.

Megoldott feladat.

KÉT KONFIGURACZIÓRÓL.

A következőkben két konfiguracziót szándékunk bemutatni; az első egy síkbeli konfiguraczió, a második pedig annak térbeli analogonja. Az első konfiguracziónak pontjai egy különös esetben egy négyoldal háromszögeibe írható köröknek középpontjai; a másodiknak pontjai pedig egy pentaéder tetraédereibe írható gömböknek középpontjai. E sorok tehát a nevezett körök és gömbök középpontjai elhelyezésének vizsgálatával foglalkoznak általánosságban.

*

1. Vegyünk fel a síkban négy egyenest $d_1d_2d_3d_4$-et, mely egy négyoldalt képez. Szerkeszszünk oly egyenespárokat $a_{ij}b_{ij}$; $a_{ik}b_{ik}$; $a_{il}b_{il}$-et, melyek a négyoldal d_i oldalát a d_j, d_k, d_l oldalaktól harmonikusan választják el. Az

$$a_{jk} = (a_{ij}a_{ik},\ b_{ij}b_{ik}), \quad b_{jk} = (a_{ij}b_{ik},\ a_{ik}b_{ij})$$

egyenesek, melyek közül az első az $(a_{ij}a_{ik})$, $(b_{ij}b_{ik})$ pontokat, a második az $(a_{ij}b_{ik})$, $(a_{ik}b_{ij})$ pontokat köti össze harmonikusan választják el a felvett négyoldal d_jd_k oldalait, mert $d_id_jd_k$ átlósháromszöge az $a_{ij}a_{ik}a_{jk}b_{ij}b_{ik}b_{jk}$ négyszögnek.

Ekképen az első három egyenespárhoz még három egyenespárt szerkesztettünk, mely hat egyenespár a $d_1d_2d_3d_4$ négyoldal oldalpárjait harmonikusan választja el.

A hat egyenespár 12 egyenese egy $k = (12_4,\ 16_3)$ konfiguracziót képez, melynek egyenesei egymást hármasával 16 pontban metszik úgy, hogy minden egyenesen négy ily metszőpont van. Ilyképen az a_{ij} egyenesen metszik egymást az $a_{ik}a_{jk}$,

$a_{il}a_{jl}$, $b_{ik}b_{jk}$, $b_{il}b_{jl}$ egyenespárok és a b_{ij} egyenesen metszik egymást az $a_{ik}b_{jk}$, $a_{il}b_{jl}$, $a_{jk}b_{ij}$, $a_{jl}b_{il}$ egyenespárok.

A konfiguracziónak olyan hat egyenese, mely egymást páronként a felvett négyoldal egyik oldalán metszi négy perspektiv háromszögpárnak képezi oldalait. Így a négyoldalnak a d_i oldalán metsző egyenespárok az

$$\begin{array}{cccc} a_{ij}a_{ik}a_{il} & a_{ij}b_{ik}b_{il} & a_{ik}b_{il}b_{ij} & a_{il}b_{ij}b_{ik} \\ b_{ij}b_{ik}b_{il} & b_{ij}a_{ik}a_{il} & b_{ik}a_{il}a_{ij} & b_{il}a_{ij}a_{ik} \end{array}$$

perspektiv háromszögpároknak oldalai. Ezeknek 12 csúcspontja és a négy kollineaczióközéppont $(a_{jk}a_{kl}a_{lj})$, $(b_{jk}b_{jl}a_{lk})$, $(b_{kl}b_{kj}a_{lj})$, $(b_{lj}b_{lk}a_{jk})$ a k konfiguracziónak 16 pontja.

A konfiguracziónak egyenesei négyszer bonthatók fel az ily négyes csoportjára a perspektiv háromszögpároknak; mind a 16 perspektiv háromszögpárnak csúcspontja, valamint a 16 hozzájuk tartozó kollineáczióközéppont a konfiguracziónak pontja.

Ismeretes, hogy egy síkban levő két perspektiv háromszög nem homolog oldalainak hat metszőpontja egy kúpszeleten van, mert e tétel csak más kifejezése a kúpszeletbe írt hatszögre vonatkozó tétel (Pascal-tétel) fordítottjának.

Minthogy a tárgyalt konfigurawczió 16 perspektiv háromszögpárja nem homolog oldalainak metszőpontjai magának a konfiguracziónak pontjai, azért e pontok hatosával 16 kúpszeleten vannak. Ehhez képest mondhatjuk:

Ha szerkesztünk oly három egyenespárt, mely egy négyoldalnak egyik oldalát a többiektől harmonikusan választja el, akkor mindegyik egyenespár a másikat négy pontban metszi, melynek harmadik összekötő egyenespárja a négyoldalnak egy újabb oldalpárját harmonikusan választja el. Ekkép nyerünk három új egyenespárt és az előbbiekkel együtt hatot. E tizenkét egyenes egy $(12_4, 16_3)$ *konfiguracziót képez, tehát egyenesei hármasával 16 ponton mennek keresztül és e pontok négyesével a 12 egyenesen vannak.*

A konfiguraczió pontjai hatosával még 16 kúpszeleten vannak és a pontok mindegyikén hat ily kúpszelet megy át.

E tételnek következménye:

Egy négyoldal háromszögeibe írható köröknek 16 középpontja hatosával 16 kúpszeleten van; minden középponton hat kúpszelet megy át.

Ekkor ugyanis azok az egyenesek, melyek a négyoldal oldalpárjait harmonikusan választják el a négyoldal szögeinek felezői.

Egy másik különös esetét találjuk a tételnek, ha a négyoldal egyik oldalát végtelen távollevőnek képzeljük. Ekkor azok az egyenespárok, melyek a végtelen távollevő oldalt a végesben fekvőktől harmonikusan választják el, parallelek ezekhez az oldalakhoz és így a tétel a négyoldaltól függetlenül ekkép fejezhető ki.

«Ha három különböző irányú egyenespárt veszünk fel tetszésszerint a síkban, akkor azok három rombust határolnak, a melyeknek átlói egy négyszögnek oldalai. E négyszögnek négy csúcsa és a felvett három egyenespárnak tizenkét metszőpontjai hatosával tizenhat kúpszeletben van.»

A fönnebbi tételnek dualis tétele így szól:

«Ha egy négyszög egyik csúcsából kiinduló oldalain oly három pontpárt veszünk fel, mely ez oldalokon levő csúcsokat harmonikusan elválasztja, akkor mindegyik pontpárnak összekötő egyenesei egy másik pontpárral a négyszög oldalain metszik egymást párosával és harmonikusan választják el az oldalakon levő csúcsokat. Ekkép három új pontpárt nyerünk. A hat pontpár tizenkét pontja egy $(16_4, 12_3)$ konfiguracziót képez, tehát pontjai hármasával 16 egyenesen vannak és egyenesei négyesével a 12 ponton mennek keresztül. A konfiguracziónak 16 egyenese hatosával 16 kúpszeletnek érintője.»

2. Mielőtt az imént talált konfiguraczió térbeli analogonjának tárgyalásához fognánk, előre kell bocsátanunk egy tételt a perspektiv tetraederekről.

Legyen valamely síkban $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$ egy perspektiv háromszögpárnak oldala; $\beta_1\beta_2\beta_3$ pedig az utóbbi háromszög oldalain keresztül menő három sík. Ha az előbb említett Pascal-tétel fordítottját a perspektiv háromszögpárra avagy az $a_1a_2a_3$ háromszögre és a $\beta_1\beta_2\beta_3$ triéderre alkalmazzuk, azt látjuk, hogy az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ háromszög oldalai a triéder lapjait oly kilencz pontban metszik, melyek közül három egy egyenesen a többi hat pedig egy kúpszeleten van. Ezért általánosan mondhatjuk:

«Ha egy háromszög oldalai egy triédernek lapjait oly kilencz pontban metszik, melyek közül három egy egyenesen van, akkor a többi hat egy kúpszeleten lesz.»

Vegyünk fel ezután egy perspektiv tetraéderpárt $\alpha\beta$-t, melyeknek homolog lapjait α_i, β_i-vel jelöljük.

Az α tetraédernek az α_i lapon levő élei a β tetraéder $\beta_j\beta_k\beta_l$ triédernek lapjait kilencz pontban metszik, melyek közül három egy egyenesen, az $\alpha_i\beta_i$ homolog lapok metszővonalán van, tehát a többi hat metszőpont $(\alpha_i\alpha_j\beta_k)$, $(\alpha_i\alpha_j\beta_l)$, $(\alpha_i\alpha_k\beta_j)$, $(\alpha_i\alpha_k\beta_l)$, $(\alpha_i\alpha_l\beta_j)$, $(\alpha_i\alpha_l\beta_k)$ egy kúpszeleten lesz. E szerint: az α tetraédernek élei a szemben fekvő élekkel homolog éleken keresztül menő lapjait a β tetraédernek oly pontpárakban metszik, melyek az α tetraédernek egyes lapjain kúpszeleten vannak. Az α tetraéder négy lapján levő négy kúpszelet egymást páronként az éleken metszi és így a tizenkét metszőpont egy másodrendű felületen fekszik. Ebből következik a jelzett tétel a perspektiv tetraéderekről:

Ha két tetraéder perspektiv, akkor az egyiknek lapjai, a másiknak a homolog lapokkal szemben fekvő csúcsokon keresztül menő éleit oly tizenkét pontban metszik, mely egy másodrendű felületen van.

A két tetraéder tehát ekképen két másodrendű felületet határoz meg, eltérőleg két perspektiv háromszög esetétől a síkban, mely csak egy kúpszeletet szolgáltat.

[Meg akarjuk jegyezni még itt, hogy a tétel meg nem fordítható, azaz: Ha valamely tetraédernek a hat éle egy II. r. felületet 12 pontban metszi és e pontok közül oly háromhárom ponton keresztül síkokat vezetünk, melyek a tetraédernek egy-egy csúcsába futó élein vannak, akkor az így nyert négy sík egy új tetraédert határol, mely általában nem perspektiv az első tetraéderrel, hanem hozzá hiperboloidikus fekvésű. Ez pedig annyit jelent, hogy az első tetraédernek lapjai a másodiknak azokat a (homolog) lapjait, melyek a szemben fekvő csúcsokhoz futó éleken levő pontokon mennek keresztül négy hiperboloidikus fekvésű egyenesben metszi és a mi ennek következménye: a homolog csúcsoknak összekötő egyenesei is hiperboloidikus fekvésűek. Egészben véve 64 tetraéder található ily módon, mely az elsővel hiperboloidikus fekvésű.]

Ezek után áttérhetünk a térbeli konfiguraczió tárgyalásához.

3. Szerkeszszünk oly síkpárakat $\alpha_{ij}\beta_{ij}$, $\alpha_{ik}\beta_{ik}$, $\alpha_{il}\beta_{il}$, $\alpha_{in}\beta_{in}$-et, a melyek egy pentaédernek δ_i lapját a többi négy laptól δ_j, δ_k, δ_l és δ_n-től harmonikusan elválasztják. Az

$$\alpha_{jk} = (\alpha_{ij}\alpha_{ik}, \beta_{ij}\beta_{ik}), \qquad \beta_{jk} = (\alpha_{ij}\beta_{ik}, \alpha_{ik}\beta_{ij})$$

síkok, melyek közül az első az $(\alpha_{ij}\alpha_{ik})$, $(\beta_{ij}\beta_{ik})$ egyeneseken, a második az $(\alpha_{ij}\beta_{ik})$, $(\alpha_{ik}\beta_{ij})$ egyeneseken megy keresztül harmonikusan választják el a $\delta_j\delta_k$ síkokat, mert $\delta_i\delta_j\delta_k$ átlóstriédere az $\alpha_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jk}\beta_{ij}\beta_{ik}\beta_{jk}$ lapoktól képezett négyélnek.

Ekképen az első négy síkpárhoz még hat síkpár szerkeszthető, a mely tíz síkpár a pentaéder összes lappárjait harmonikusan választja el.

E tíz síkpárnak 20 síkja egy K konfigurácziót képez, melynek síkjai hármasával 40 egyenesben és hatosával 40 pontban metszik egymást; minden síkban 6 egyenes és 12 pont van; minden egyenes tartója 4 pontnak és minden ponton 4 egyenes megy át, végre a pentaédernek csúcsai nem pontjai a konfigurácziónak.

Így az α_{ij} síkban az $\alpha_{ik}\alpha_{jk}$, $\beta_{ik}\beta_{jk}$, $\alpha_{il}\alpha_{jl}$, $\beta_{il}\beta_{jl}$, $\alpha_{in}\alpha_{jn}$, $\beta_{in}\beta_{jn}$ síkpárok és a β_{ij} síkban az $\alpha_{ik}\beta_{jk}$, $\alpha_{jk}\beta_{ik}$, $\alpha_{il}\beta_{jl}$, $\alpha_{jl}\beta_{il}$, $\alpha_{in}\beta_{jn}$, $\alpha_{jn}\beta_{in}$ síkpárok metszik egymást, továbbá az α_{ij} síkban levő első két egyenes a többi négyet nyolcz pontban, a harmadik és negyedik az utolsó kettőt még négy pontban metszi, mely 12 pont az α_{ij} síkban levő pontja konfigurácziónak.

A konfiguraczió bármely négy síkpárja, mely egymást a pentaédernek egyik lapján metszi, e pentaéderlapra mint kollineacziósíkra vonatkozó nyolcz perspektiv tetraéderpárnak képezi lapjait. Így ha a pentaédernek δ_i lapját tekintjük kollineacziósíknak, akkor a perspektiv tetraéderek lapjai:

$$\begin{array}{cccc}
\alpha_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{il}\alpha_{in} & \alpha_{ij}\alpha_{ik}\beta_{il}\beta_{in} & \alpha_{ij}\alpha_{il}\beta_{ik}\beta_{in} & \alpha_{ij}\alpha_{in}\beta_{ik}\beta_{il} \\
\beta_{ij}\beta_{ik}\beta_{il}\beta_{in} & \beta_{ij}\beta_{ik}\alpha_{il}\alpha_{in} & \beta_{ij}\beta_{il}\alpha_{ik}\alpha_{in} & \beta_{ij}\beta_{in}\alpha_{ik}\alpha_{il} \\
 & & & \\
\alpha_{ij}\beta_{ik}\beta_{il}\beta_{in} & \alpha_{ik}\beta_{ij}\beta_{il}\beta_{in} & \alpha_{il}\beta_{ij}\beta_{ik}\beta_{in} & \alpha_{in}\beta_{ij}\beta_{ik}\beta_{il} \\
\beta_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{il}\alpha_{in} & \beta_{ik}\alpha_{ij}\alpha_{il}\alpha_{in} & \beta_{il}\alpha_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{in} & \beta_{in}\alpha_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{il}
\end{array}$$

ezeknek 32 különböző csúcspontja és a nyolcz kollineáczióközéppont

$$(\alpha_{jk}\alpha_{jl}\alpha_{jn}\alpha_{kl}\alpha_{kn}\alpha_{ln}), \quad (\alpha_{jk}\alpha_{ln}\beta_{jl}\beta_{jn}\beta_{kl}\beta_{kn}) \quad . \quad .$$
$$(\alpha_{kl}\alpha_{kn}\alpha_{ln}\beta_{jk}\beta_{jl}\beta_{jn}) \quad . \quad . \quad .$$

képezi a K konfiguracziónak 40 pontját.

A konfiguracziónak síkjai ötször bonthatók fel ily nyolczas csoportjára a perspektiv tetraéderpároknak; mind a 40 perspektiv tetraéderpárnak csúcsai, valamint a hozzájuk tartozó 40 kollineaczióközéppont a K-nak pontjai.

Alkalmazzuk e 40 perspektiv tetraéderpárra a 2. alatti tételt és fejezzük ki magának a K konfiguracziónak szerkesztését a pentaéderből e tételbe:

Ha oly négy síkpárt szerkesztünk, mely egy pentaédernek egyik lapját a többi négytől harmonikusan elválasztja, akkor mindegyik síkpár egy másik síkpárt oly négy egyenesben metszi, melyeknek harmadik összekötő síkpárja a pentaédernek egy újabb síkpárját harmonikusan választja el. Ekkép még hat új síkpárt és az előbbiekkel együtt tíz síkpárt nyerünk. Ezeknek 20 síkja egy K konfigurucziót képez, melynek síkjai egymást hármasával 40 egyenesben és hatosával 40 pontban metszik; ezek közül mindegyik síkban van 6 egyenes és 12 pont, mindegyik egyenesen van 4 pont és mindegyik ponton 4 egyenes megy át.

A K egyes síkjaiban a 12 pont hatosával 4 kúpszeleten, tehát a K-nak összes pontjai hatosával 80 kúpszeleten, $k^{(2)}$-n vannak.

A K síkjai 40 perspektiv tetraéderpárnak lapjai és ezért a K-nak pontjai tizenkettesével 80 másodrendű felületen, $F^{(2)}$-n vannak; mindegyik $F^{(2)}$-n van négy $k^{(2)}$ kúpszelet és mindegyik $k^{(2)}$ kúpszeleten négy $F^{(2)}$ felület megy keresztül. Végre a K-nak mindegyik pontján 12 $k^{(2)}$ kúpszelet és 24 $F^{(2)}$ másodrendű felület megy át.

E tételnek következménye:

Egy pentaéder öt tetraéderébe írható 40 gömbnek 40 középpontja négyesével 40 egyenesen, e-n, tizenkettesével 20 síkon, σ-án, hatosával 80 kúpszeleten, $k^{(2)}$-n és tizenkettesével 80 másodrendű felületen, $F^{(2)}$-n van; mindegyik $k^{(2)}$ négy $F^{(2)}$-n és mindegyik $F^{(2)}$-n négy $k^{(2)}$ fekszik, végre mindegyik középponton négy e, hat σ, 12 $k^{(2)}$ és 24 $F^{(2)}$ megy keresztül.

Ekkor ugyanis azok a síkok, melyek a pentaéder lappárjait harmonikusan elválasztják a pentaéder lapszögeinek felezői.

Feltételezvén, hogy a pentaédernek egyik lapja végtelen távol van és így azok a síkpárok, melyek ezt a lapot a végesben fekvőktől harmonikusan elválasztják parallelek emezekhez. Ebből következik:

«Ha felveszünk négy síkot, mely egy tetraédert határol és más négy ezekkel parallel síkot, mely szintén egy tetraédert határol, akkor a felvett nyolcz sík még négy parallelepipedonnak is határló lapja. E négy parallelepipedon szemben fekvő éleinek (csupán) 12 összekötő úgynevezett átlóssíkja van, mely a felvett 8 síkkal együttvéve egy konfiguracziót képez. E 20 sík egymást hatosával 40 oly pontban metszi, mely hatosával 80 kúpszeleten és tizenkettesével 80 másodrendű felületen van; mindegyik metszőponton a kúpszeletek közül 12, a másodrendű felületek közül 24 megy keresztül.»

A tételnek dualis tétele pedig ekkép fejezhető ki:

«Ha felveszünk egy térbeli ötszöget és oly négy pontpárt szerkesztünk, mely a térötszög egyik csúcsát a többi négy csúcstól harmonikusan választja el, akkor a szerkesztett pontoknak a térötszög első csúcsába futó négy oldalán kívül még 24 összekötő egyenese van. Ezek párosával oly 12 pontban metszik egymást, melyek a térötszög többi csúcspárjait is harmonikusan választják el.

A szerkesztett 20 pont hatosával 40 síkban és hármasával 40 egyenesen van; e 40 sík hatosával 80 másodrendű kúpnak és tizenkettesével 80 ált. másodrendű felületnek érintősíkja; mindegyike a síkoknak 12 kúpnak és 24 ált. másodrendű felületnek érintősíkja; mindegyike a kúpoknak négy ált. másodrendű felület körül van írva és mindegyike az ált. másodrendű felületeknek négy kúpba van beirva.»

Klug Lipót.

A DIRICHLET-FÉLE PROBLÉMA EGY ESETÉRŐL.

(Első közlemény.)

I. Bevezetés. A probléma kitűzése.

1. FOURIER a hővezetésről irott munkájában (Théorie analytique de la Chaleur) megállapitja, hogy ha egy test minden pontján a hőmérséklet állandó, ez belül a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

LAPLACE-féle egyenletnek, a határfelületen pedig a

$$\frac{dV}{dn} = h\,(V - V_0)$$

feltételnek tesz eleget, a hol n a befelé néző normális, V_0 a külső — egyébként helyről-helyre változó — megadott hőmérséklet és h a felület minden pontján ismert pozitiv függvény.

Ha $h = \infty$, akkor

$$V = V_0$$

és V keresése a DIRICHLET-féle problémát szolgáltatja.

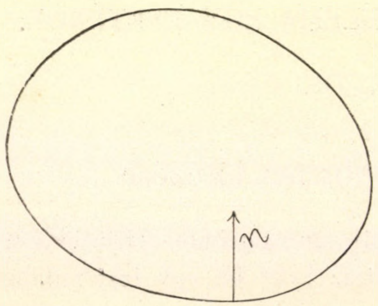
Elsőnek FOURIER a következő kérdést tárgyalja: legyen valamely test, melyet az

$$x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = +\frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

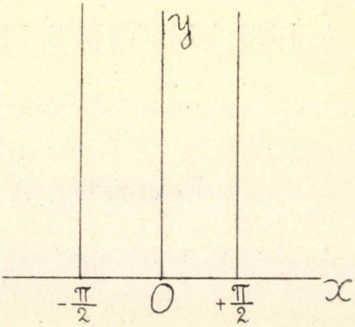
sikok határolnak, hőmérsékleti egyensúlyban; a z tengelylyel párhuzamos egyenesek mentén a hőmérséklet ne változzék; fölteszszük továbbá, hogy $h = \infty$ és megadjuk a hőmérsékletet az x tengelyen $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ abscissájú pontok között:

$$V = f(x),$$

az oldalfelületeket pedig zérus mérsékleten tartjuk: milyen hőmérsékleten vannak a test pontjai?



1. ábra.



2. ábra.

Tekintve, hogy a V hőmérséklet csakis x és y függvénye, a feladat mathematikai alakban igy fogalmazható:

Keressük a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

egyenletnek oly megoldását, mely az x tengelyen $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ között megadott $f(x)$ értéket vesz fel, az

$$x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = +\frac{\pi}{2}, \quad (y > 0)$$

egyeneseken zérus és a végtelenben véges marad.

2. Fourier azt keresi először, nem lehetne-e

$$V = \varphi(x)\psi(y)$$

alakú megoldást találni. Egyszerű számítással kiderül, hogy az

$$e^{-(2m+1)y}\cos(2m+1)x$$
$$e^{-2my}\sin 2mx$$

alakú függvények (m pozitiv egész szám lévén) eleget tesznek minden feltételnek, kivéve azt, mely az x tengelyre vonatkozik. Fourier tehát megalkotja az

$$a_1 e^{-y}\cos x + a_3 e^{-3y}\cos 3x + a_5 e^{-5y}\cos 5x + \cdots$$
$$+ b_2 e^{-2y}\sin 2x + b_4 e^{-4y}\sin 4x + b_6 e^{-6y}\sin 6x + \cdots$$

sort és még lehet mutatni, hogy ez megoldás, ha sikerül az a_n, b_n együtthatókat úgy meghatározni, hogy $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ között

$$f(x) = a_1\cos x + a_3\cos 3x + a_5\cos 5x + \cdots$$
$$+ b_2\sin 2x + b_4\sin 4x + b_6\sin 6x + \cdots$$

legyen.

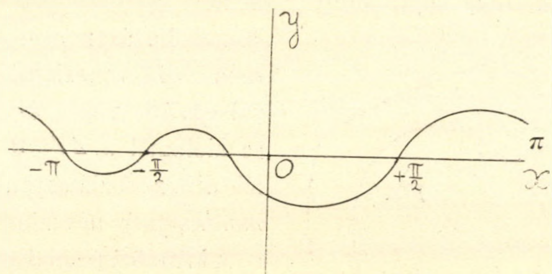
Tegyük fel, hogy $f(x)$ valóban kifejthető Fourier-sorba. Tekintve, hogy $f(x)$ csak $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ között van megadva, értelmezését kiegészíthetjük azzal, hogy

$$f(x) = -f(-\pi - x), \quad \text{ha} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2}$$

és

$$f(x) = -f(\pi - x), \quad \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Ekkor $f(x)$ Fourier-sorából csakugyan eltűnnek x páros többszöröseinek cosinusai és páratlan többszöröseinek sinusai.



3. ábra.

3. Az itt elmondottak arra ösztönöznek bennünket, hogy a Dirichlet-féle problémának általános megoldását keressük egy parallelogrammaszerű, végtelenbe nyuló tartomány esetére.

Tegyük fel tehát, hogy megadják V-t a D tartomány határain:

$$
\begin{aligned}
&V = f(x), \text{ ha } y=0 \quad \text{és } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2},\\
(H)\quad &V = \varphi(y), \text{ ha } x = -\frac{\pi}{2} \text{ és } y \geqq 0; \quad \left[\varphi(0) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].\\
&V = \psi(y), \text{ ha } x = +\frac{\pi}{2} \text{ és } y \geqq 0; \quad \left[\psi(0) = f\left(+\frac{\pi}{2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

a hol f, φ, ψ függvények végesek, folytonosak, továbbá φ és ψ függvények véges határok felé közelednek, ha y a végtelenbe nő.

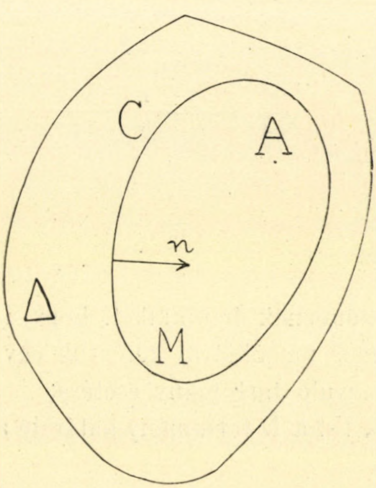
A feladat most már az, hogy meghatározzuk a

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

parcziális differencziálegyenletnek olyan V megoldását, a mely véges marad az egész tartományon belül, első és másodrendű differencziálhányadosaival együtt folytonos és kielégíti a (H) határfeltételeket. Azaz, ha a határvonalon megadott függvény értéke ennek C pontjában K és C felé belülről közeledünk, azt kivánjuk, hogy V értéke K felé tartson.

Fourier megoldása a $\varphi=0$, $\psi=0$ esetre vonatkozik.

4. Olyan függvényt, mely valamely tartományon belül és annak határán első és másod rendű differencziálhányadosaival együtt véges és folytonos és kielégíti a $\Delta V=0$ Laplace-féle differencziálegyenletet, *harmonikus*nak nevezünk.



4. ábra.

A kitűzött feladat megoldása előtt czélszerű lesz összefoglalnunk a harmonikus függvények alaptulajdonságait.

Legyen V harmonikus függvény valamely egyszerűen összefüggő Δ tartomány belsejében és válaszszunk egy a tartományon belülfekvő zárt tetszésszerinti C görbét. C-nek pontjain a befelé néző normálist n-nel, C-nek ívelemét pedig ds-sel fogjuk jelölni. Ha az U függvény is harmonikus egy olyan tartományban, mely C belsejét egészen magában foglalja, akkor

$$\int_C \left(V\frac{dU}{dn} - U\frac{dV}{dn}\right) ds = 0. \tag{1}$$

Ez a Green-féle formulából következik. Ha tehát az $A(x_0, y_0)$ pont a C görbén kívül fekszik és r e pont távolságát az $M(x, y)$ ponttól jelenti, akkor

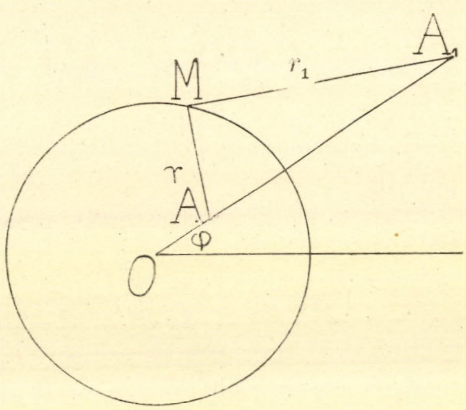
$$\int_C \left(V\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right) ds = 0. \tag{2}$$

Ha az $A(x_0, y_0)$ pont a C görbén belül van, akkor az előbbi képlet helyébe a következő lép:[1]

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(V\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right) ds. \tag{3}$$

E szerint V teljesen meg van határozva C-n belül, ha ismerjük V-t és $\frac{dV}{dn}$-et.

A mikor a C görbe kör, a $\frac{dV}{dn}$ differencziálhányadostól hamar megszabadulhatunk. Vegyük figyelembe ugyanis az A pont A_1 konjugáltját, a melyet az A pont C körvonalra vonatkozó képének tekinthetünk. Legyen O a kör középpontja és R a sugár hosszúsága, továbbá



5. ábra.

[1] L. Picard: Traité d'Analyse I. kiadás II. k. 15. l.

$$AM = r, \quad A_1M = r_1,$$
$$OM = l, \quad OA_1 = l_1.$$

Ha az M pont rajta van a körön, akkor

$$\frac{r}{r_1} = \frac{l}{R} = \frac{R}{l_1}; \quad ll_1 = R^2,$$

tehát

$$\log\frac{1}{r} = \log\frac{1}{r_1}\frac{R}{l}.$$

Írjuk fel már most, hogy

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(V\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right) ds$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(V\frac{d\log\frac{1}{r_1}\frac{R}{l}}{dn} - \log\frac{1}{r_1}\frac{R}{l}\frac{dV}{dn}\right) ds,$$

és vonjuk le a felső egyenlőségből az alsót, akkor

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C V\frac{d\log\frac{r_1}{r}\frac{R}{l}}{dn} ds \tag{4}$$

vagy

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C V\frac{R^2-l^2}{Rr^2} ds. \tag{4)'$$

Ha bevezetünk polárkoordinátákat és O-ba helyezzük a kezdőpontot,

$$x_0 = l\cos\varphi, \quad y_0 = l\sin\varphi$$

és

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\frac{R^2-l^2}{R^2-2Rl\cos(\psi-\varphi)+l^2} d\psi. \tag{4)''$$

Ez a Poisson-féle formula és innen le lehet vezetni, hogy V a kör minden belső pontjában x_0, y_0-nak analitikai függvénye.[1]

[1] L. Picard: Traité d'Analyse I. kiadás II. k. 18. l.

5. Az előbbiekből következik, hogy *ha valamely függvény egy tartományban harmonikus, akkor a tartomány belsejében analitikai,* mert minden belső pont köré írható oly kör, mely a tartományból nem lép ki s a melyben a függvény analitikai.

Harmonikus függvénynek továbbá nem lehet szélső értéke a tartomány egyetlen belső helyén sem. Tegyük fel például, hogy O-ban V-nek maximuma volna; akkor az O-t körülvevő elég kis területen

$$V < V_0,$$

V_0-val jelölve V értékét az O pontban. Írjunk le kört O középpontból, mely az említett kis területen belül van. A (4) alatti képlet szerint V-t a körön integrálván,

$$V_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V d\psi,$$

holott, ha az előbbi egyenlőtlenség helyes

$$V_0 > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V d\psi.$$

Tehát V_0 maximum nem lehet. Szintúgy nincsen minimum sem.

Harmonikus függvény azonosan zérus a C görbe belsejében, ha C-n mindenütt zérus. Ellenkező esetben t. i. volna valahol belül legalább egy pozitiv maximuma vagy negativ minimuma.

Ha a V függvény az egész síkban harmonikus és absolut értékre valamely B számnál kisebb marad, e függvény állandó. Írjunk le ugyanis kört O középpontból R sugárral. E kör mentén integrálván V-t, lesz:

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \frac{R^2 - l^2}{R^2 - 2Rl\cos(\varphi - \psi) + l^2} d\psi,$$

$$V_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V d\psi,$$

tehát

$$V(x_0, y_0) - V_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2lV \frac{R\cos(\psi-\varphi)-l}{R^2-2lR\cos(\psi-\varphi)+l^2}\,d\psi$$

és minthogy

$$|V| < B, \quad \left|\frac{R\cos(\psi-\varphi)-l}{R^2-2lR\cos(\psi-\varphi)+l^2}\right| < \frac{R+l}{(R-l)^2},$$

innen

$$|V(x_0, y_0) - V_0| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2lB\frac{R+l}{(R-l)^2}\,d\psi = \frac{2lB(R+l)}{(R-l)^2}.$$

R növelésével a jobb oldal tetszőleges kicsinynyé tehető és mivel $V(x_0, y_0) - V_0$ R-től független. azt következtetjük, hogy

$$V(x_0, y_0) - V_0 = 0,$$

azaz $V(x_0, y_0)$ állandó.

Ezek után könnyen be fogjuk látni, hogy zárt C görbén belül legfeljebb egy harmonikus függvény van, a melynek e görbe mentén határszéli értékei meg vannak adva (egy változós folytonos függvénynyel). *Két* ilyen függvény különbsége ugyanis a C vonalon zérus és belül harmonikus, tehát azonosan zérus. Egy ilyen függvény azonban mindig van. Ezt állítja Dirichlet elve. Ma már ez elvnek nagyon sok bebizonyításával rendelkezünk, de a következőkben nem lesz rá szükségünk, tehát ennél a pontnál nem időzünk tovább.

6. Világos, hogy a (3) alatti formula nem szolgáltatja a Dirichlet-féle probléma megoldását, mert nemcsak V-nek, hanem $\frac{dV}{dn}$-nek ismeretét is követeli a C zárt vonal mentén.

Ha azonban sikerül oly $H(x, y)$ harmonikus függvényt találnunk, mely C-nek pontjain $-\frac{1}{r}$-rel egyenlő, akkor (3)-hoz csatolván az

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left(V\frac{dH}{dn} - H\frac{dV}{dn}\right) ds = 0,$$

képletet azt kapnók, hogy

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_C V \frac{dG}{dn} ds, \tag{5}$$

a hol
$$G = \log \frac{1}{r} + H.$$

$G(x, y; x_0, y_0)$-t GREEN-féle függvénynek nevezzük és fontossága abban rejlik, hogy csak a C zárt vonal alakjától függ, de V-nek a C-n felvett értékeitől független.

A DIRICHLET-féle probléma megoldása és a H harmonikus függvény — vagy a mi egyre megy — a GREEN-féle függvény meghatározása teljesen æquivalens feladatok.

A POISSON-féle (4) formulát azzal a feltevéssel kaptuk, hogy nemcsak V, hanem $\frac{dV}{dn}$ is véges és folytonos a körön. SCHWARTZ megmutatta, hogy a

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - l^2}{R^2 - 2Rl \cos(\psi - \varphi) + l^2} d\psi \tag{6}$$

egyenlőséggel definiált V függvény harmonikus és valóban közeledik $f(\varphi)$-hez, ha az A pont a kör $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ pontja felé tart feltéve, hogy $f(\varphi)$ ezen a helyen folytonos.

E szerint körre nézve a DIRICHLET-féle probléma meg van oldva és a GREEN-függvény

$$G = \log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r_1} \frac{R}{l}.$$

Ezt a függvényt úgy kaptuk, hogy tekintetbe vettük az A pont képét a határvonalra vonatkozólag. Ugyanez a módszer a félkörnél is beválik. Ha megszerkesztjük az A pont A_1 és A' képeit a körvonal és az átmérőre vonatkozólag, továbbá A'-nek a körre vonatkozó A'_1 képét (mely A_1-nek is képe az átmérőre nézve), a képek sorozata teljes és közvetetlenül igazolható, hogy

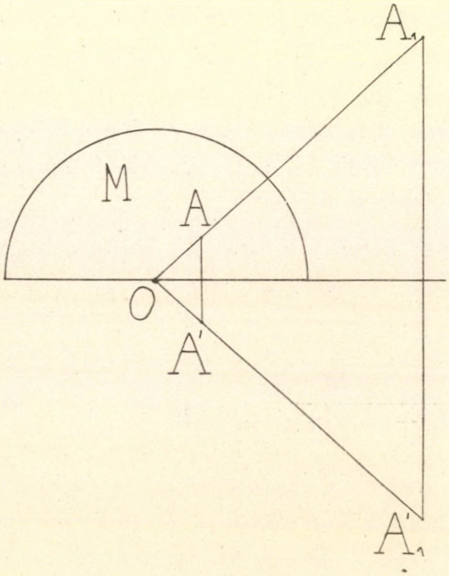
$$r = AM, \quad r_1 = A_1M, \quad r' = A'M, \quad r'_1 = A'_1M$$

jelölést használván, a GREEN-féle függvény:

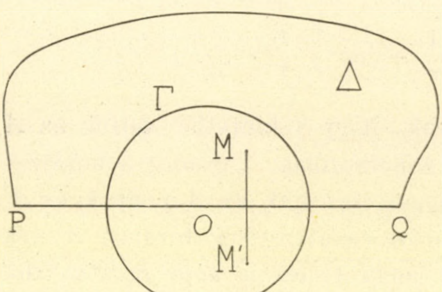
$$G = \log \frac{1}{r} - \log \frac{1}{r} \frac{R}{l} - \log \frac{1}{r'} + \log \frac{1}{r'_1} \frac{R}{l}.$$

7. Az előbbiek alapján bebizonyítjuk még a következő Schwartztól származó tételt:

Ha valamely V függvény harmonikus a Δ tartományban és értéke zérus a tartomány határvonalához tartozó PQ egyenes darab mentén, akkor a V függvény analitikai nemcsak Δ-n belül, hanem a PQ egyenes darabon is, legfeljebb a P és Q pontokat kivéve.



6. ábra.



7. ábra.

Legyen O tetszőleges pont a PQ egyenesen P és Q között. O-ból, mint középpontból írjunk le kört R sugárral. Ha R elég kicsiny, a kör egyik — mondjuk, felső — fele Γ egészen bent van Δ-ban, a Γ' alsó fél pedig egészen künt van. Legyen már most M a kör valamely belső pontja és tükörképe PQ-ra vonatkozólag M'. Ez utóbbi pontban V-t a következő egyenlőséggel definiáljuk:

$$V(M') = -V(M). \quad (E)$$

Azt állítom, hogy V az egész kör belsejében analitikai. Ez a két félkörre nézve *a priori* világos, csak a PQ átmérő pont jaira nézve lehet kétségünk. Ámde a $\Gamma\Gamma'$ kör mentén integrálván, a

$$W(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V \frac{R^2-l^2}{R^2-2Rl\cos(\psi-\varphi)+l^2}\, d\psi$$

függvény, ha Γ egy pontjához közeledünk, V felé tart; a PQ átmérőn pedig (E) egyenlőség alapján

$$W=0,$$

tehát PQ és Γ között W összeesik V-vel és szintúgy PQ és Γ' között is. W-ről tudjuk, hogy az egész kör belsejében analitikai, ugyanez áll tehát V-re is. Ez az, a mit be akartunk bizonyítani.

II. A probléma megoldása.

8. Térjünk vissza a 3. §.-ban kitűzött problémához.

Legelőször az a kérdés, lehetséges-e egynél több megoldás. Tegyük fel, hogy van két megoldásunk. Különbségük W véges marad az egész tartományban (mondjuk: $|W| < B$) és zérus értéket vesz fel a határon. Bebizonyítom, hogy $W=0$.

Legyen A a

$$PQ\left(y=0;\ -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2}\right),\quad Pp\left(x=-\frac{\pi}{2};\ y \geqq 0\right)$$

és
$$Qq\left(x=+\frac{\pi}{2};\ y \geqq 0\right)$$

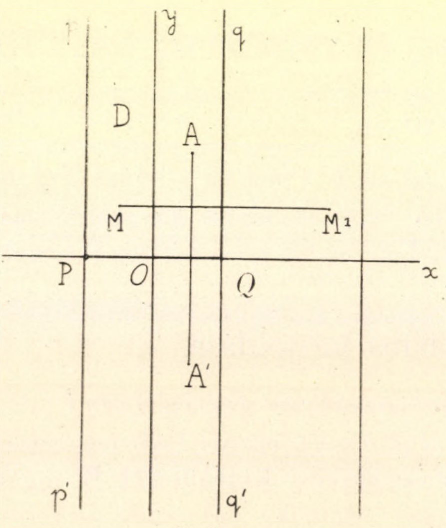
egyenesekkel határolt D tartomány egy pontja és A' e pontnak képe PQ-ra vonatkozólag. Terjeszszük ki W értelmezését a D tartomány D' képére a következő módon:

$$W(A') = -W(A).$$

A D és D' tartományok egyesítésével keletkező D_1 tartományban W harmonikus és értéke a pp' és qq' párhuzamosokon zérus. Tehát még ezen egyenesek minden pontján is analitikai, a mi P és Q-ról előre nem volt világos. Állítsuk elő a D_1 tartomány tetszőleges M pontjának M_1 képét qq'-re vonatkozólag és legyen

$$W(M_1) = -W(M).$$

A D_1 tartomány és képe együtt egy új tartományt alkotnak, hasonlót D_1-hez, a melyben W éppen úgy viselkedik, mint D_1-ben és a melyben szintén $|W| < B$. A leírt eljárást határtalanul ismételve, sikerül W-t értelmeznünk az egész síkra nézve úgy, hogy W harmonikus és absolut értéke B-n alul marad az egész síkon. Innen következik, hogy W állandó (5. §.) és minthogy például az x tengelyen zérus, W azonosan zérus.



8. ábra.

9. A kitűzött problémának tehát legfeljebb egy megoldása van. E megoldás keresésére ki fogunk indulni a (3) alatti formulából.

Rajzoljuk meg a PQQ_1P_1 derékszögű négyszöget, melynek csúcsai:

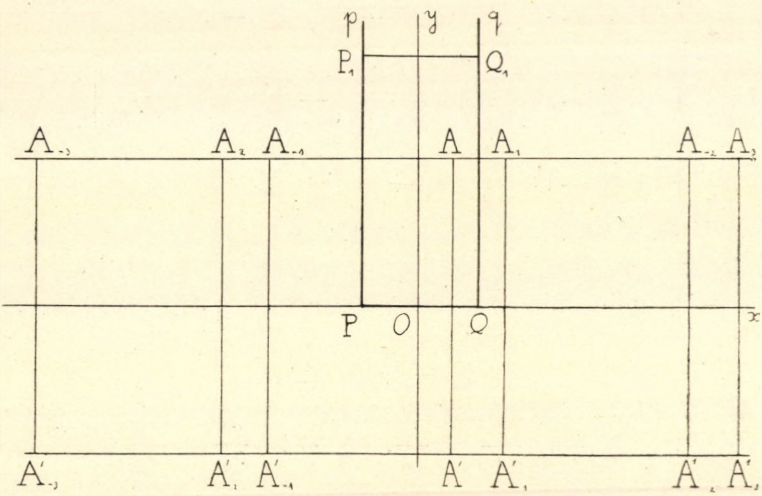
$$P\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad Q\left(+\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad Q_1\left(+\frac{\pi}{2}, y_1\right), \quad P_1\left(-\frac{\pi}{2}, y_1\right);$$

legyen $A(x_0, y_0)$ a négyszög egy belső pontja és szerkeszszük meg A képeit, valamint a képek képeit a PQ, Pp és Qq egyenesekre vonatkozólag. Állapodjunk meg továbbá a következő jelölésben:

A_1	képe	A-nak	Qq-ra	vonatkozólag
A_2	«	A_1-nek	Pp-re	«
A_3	«	A_2-nek	Qq-ra	«
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_{-1}	«	A-nak	Pp-re	«
A_{-2}	«	A_{-1}-nek	Qq-ra	«
A_{-3}	«	A_{-2}-nek	Pp-re	«
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A'_n	«	A_n-nek	PQ-ra	«

$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

Legyen $M(x, y)$ pont távolsága A_n-től r_n, A'_n-től r'_n. Írjuk fel az A pontra és valamennyi képére nézve a (3), illetőleg a (2) egyenlőséget a PQQ_1P_1 négyszög kerületén integrálván:



9. ábra.

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int\left(V\frac{d\log\frac{1}{r}}{dn} - \log\frac{1}{r}\frac{dV}{dn}\right)ds,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\left(V\frac{d\log\frac{1}{r_1}}{dn} - \log\frac{1}{r_1}\frac{dV}{dn}\right)ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (7)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\left(V\frac{d\log\frac{1}{r'}}{dn} - \log\frac{1}{r'}\frac{dV}{dn}\right)ds,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\left(V\frac{d\log\frac{1}{r'_1}}{dn} - \log\frac{1}{r'_1}\frac{dV}{dn}\right)ds.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Innen

$$
\begin{aligned}
V(x_0, y_0) &= \\
= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{PQ} & \left[V \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{r'_n}{r_n} - \frac{\partial V}{\partial y} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n} \right] dx \\
+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{PP_1} & \left[V \sum (-1)^n \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{r'_n}{r_n} - \frac{\partial V}{\partial x} \sum (-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n} \right] dy \\
- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{QQ_1} & \left[V \sum (-1)^n \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{r'_n}{r_n} - \frac{\partial V}{\partial x} \sum (-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n} \right] dy \\
- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{P_1Q_1} & \left[V \sum (-1)^n \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{r'_n}{r_n} - \frac{\partial V}{\partial y} \sum (-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n} \right] dx.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Jogos-e azonban a végrehajtott summatio? Bizonyára jogos, ha — a mint mindjárt bebizonyítjuk — a következő sorok:

$$
\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n},
$$

$$
\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{r'_n}{r_n}, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{r'_n}{r_n}
$$

feltétlenül és egyenletesen összetartók minden oly $\varDelta$ tartományon belül, mely egészen véges távolban fekszik és a melynek valamennyi pontja az A ponttól vagy az A bármelyik képétől legalább δ távolságban van.

10. Az A_n pont koordinátái:

$$
(-1)^n [x_0 - n\pi] \quad \text{és} \quad y_0
$$

az A'_n pont koordinátái pedig

$$
(-1)^n [x_0 - n\pi] \quad \text{és} \quad -y_0 .
$$

Tehát

$$
\begin{aligned}
S = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n} &= \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \log \frac{[x-(-1)^n(x_0-n\pi)]^2+(y+y_0)^2}{[x-(-1)^n(x_0-n\pi)]^2+(y-y_0)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S = \tfrac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \log \frac{(x-x_0+2n\pi)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0+2n\pi)^2+(y-y_0)^2} & - \\
- \tfrac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \log \frac{(x+x_0+\pi+2n\pi)^2+(y+y_0)^2}{(x+x_0+\pi+2n\pi)^2+(y+y_0)^2} & .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Jelöljük a jobboldali két sort S_1 és S_2-vel, akkor:

$$S = S_1 - S_2.$$

Minthogy az S_1 és S_2 sorok minden tagja egyező előjelű, az S sor feltétlen és egyenletes összetartás biztosítva lesz, ha ezt S_1 és S_2-re külön-külön kimutatjuk. Ez nem jár semmi nehézséggel. Az S_1 sor, a

$$\Pi_1 = \prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0+2n\pi)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0+2n\pi)^2+(y-y_0)^2} = \prod_{-\infty}^{+\infty}(1+u_n)$$

szorzat és a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$$

sor összetartás tekintetében egészen egyformán viselkednek. Mivel pedig, ha $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{b_n}{n^2},$$

a hol

$$b_n = \frac{yy_0}{\pi^2 + \pi\dfrac{x-x_0}{n} + \dfrac{r^2}{4n^2}}$$

és valamely elég nagy N-től kezdve, ha $|n| > N$

$$|b_n| < \frac{by_0}{\pi^2-1},$$

(b-vel jelölve oly pozitiv számot, a melynél Δ-nak minden pontja közelebb van az Ox tengelyhez), a $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} u_n$ sor feltétlenül és egyenletesen összetart az egész Δ tartományban.

Tekintve, hogy S_2 csak abban különbözik S_1-től, hogy $-x_0$ helyére $x_0+\pi$ kerül, az S_1-re szóló következtetés S_2-re és így S-re is érvényes.

Lássuk a második megvizsgálandó sort:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{\partial}{\partial x}\log\frac{r_n'}{r_n} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}(x - x_0 + 2n\pi)\left[\frac{1}{(x-x_0+2n\pi)^2+(y+y_0)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x-x_0+2n\pi)^2+(y-y_0)^2}\right]$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty}(x+x_0+\pi+2n\pi)\left[\frac{1}{(x+x_0+\pi+2n\pi)^2+(y+y_0)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x+x_0+\pi+2n\pi)^2+(y-y_0)^2}\right]. \qquad (10)$$

A jobboldali sorok általános tagjai mind kisebbek, ha $|n|$ elég nagy, mint

$$\frac{M}{|n|^3},$$

a hol M pozitiv állandó; ez elég állításunk igazolására.

Végre

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{\partial}{\partial y}\log\frac{r_n'}{r_n} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{y+y_0}{(x-x_0+2n\pi)^2+(y+y_0)^2} -$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{y-y_0}{(x-x_0+2n\pi)^2+(y-y_0)^2}$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{y+y_0}{(x+x_0+\pi+2n\pi)^2+(y+y_0)^2} -$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{y-y_0}{(x+x_0+\pi+2n\pi)^2+(y-y_0)^2}. \qquad (11)$$

A jobboldali sorok mind úgy tartanak össze, mint

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

tehát állításunk teljesen be van bizonyítva.

Sőt most már azt is kimondhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{r'_n}{r_n} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n}, \\ \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{r'_n}{r_n} &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n}.\end{aligned} \tag{12}$$

11. A midőn az $M(x, y)$ pont a Pp, PQ vagy Qq egyenesen van, akkor

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n} = 0.$$

Valóban

$$\begin{array}{llll} PQ \text{ pontjain} & r_n = r'_n & \text{tehát} & \dfrac{r'_n}{r_n} = 1, \\ Pp \quad « & \begin{cases} r_{2n} = r_{2n-1} \\ r'_{2n} = r'_{2n-1} \end{cases} & « & \dfrac{r'_{2n}}{r_{2n}} = \dfrac{r'_{2n-1}}{r_{2n-1}}, \\ Pq \quad « & \begin{cases} r_{2n} = r_{2n+1} \\ r'_{2n} = r'_{2n+1} \end{cases} & « & \dfrac{r'_{2n}}{r_{2n}} = \dfrac{r'_{2n+1}}{r_{2n+1}}. \end{array}$$

Itt látjuk, mennyiben veszszük hasznát az A pont képeinek. Térjünk vissza most a (8) alatti formulához. *Feltéve, hogy V differencziálhányadosa a határvonal normálisa mentén mindenütt véges*, azt találjuk, hogy

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{PQ} f(x) \frac{\partial G}{\partial y} dx + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{PP_1} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial x} dy - \\ - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{QQ_1} \psi(y) \frac{\partial G}{\partial x} dy - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{P_1Q_1} \left(V \frac{\partial G}{\partial y} - G \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx, \end{aligned} \tag{13}$$

a hol

$$G(x, y; x_0, y_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \log \frac{r'_n}{r_n}$$

és ez nem más, mint a $pPQq$ végtelenbe nyúló terület GREEN-féle függvénye.

Mindamellett a (13) alatti formula nem lehet végleges, mert P_1Q_1 mentén integrácziót követel. Ettől megszabadulhatunk, ha P_1Q_1-et eltoljuk a végtelenbe. Meg fogjuk tehát vizsgálni, hogyan viselkednek G és $\frac{\partial G}{\partial y}$, ha y a végtelenbe növekszik.

Szűcs Adolf.

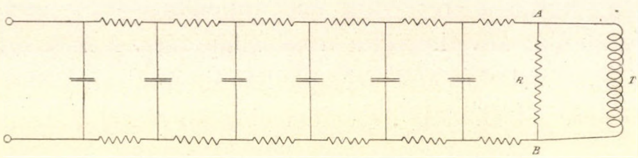
NAGY VÁLTAKOZÓ SZÁMMAL BIRÓ GYENGE ÁRAMOK MUNKÁJÁNAK MÉRÉSE.*

Úgy a drótnélküli táviró kisérleteknél, mint a messzetelefonálási vizsgálatoknál mindinkább szükségessé vált az abszolut mérések véghezvitele, hogy így a tünemények quantitativ vizsgálata alapján új eredmények elérhetők lehessenek. Utóbbi időben óriási összegek költettek el olyan kisérletekre, a melyeknél a vizsgálati kisérletek egyáltalán nem voltak mérésnek alávethetők s így az eredmények sokszor csak talán a feltaláló subjektiv érzése folytán voltak oly kedvezők, mint a milyennek gondoltattak; s a gyakorlatban nem váltak be megfelelően. Nem akarok a supermarin telegráfiára hivatkozni, sem a 4000 kilométeres telefonra, csak megjegyzem, hogy az emberi érzékek egyáltalán nincsenek quantitativ vizsgálatra berendezve s így például annak eldöntése, hogy a megérkező telefonáram a hallgatóban nagyobb effektust ad-e, sokkal nagyobb mértékben függ a kisérlettel össze nem függő körülményektől, például az időjárásnak a megfigyelőre gyakorolt hatásától, mint magától az áramtól.

A gyenge áramú és nagyobb frequencziájú áramok erősségének mérésében Duddell és Kennelly vizsgálatai érdekesek. A többi kisérletezők például E. F. Northrup és M. Tissot a milliampèrek törtrészeit már nem tudják mérni s mivel a telefonáramoknál, mint a drótnélküli táviró áramainál ezek érdekelnek leginkább, utóbb nevezettek műszereit nem ismertetem.

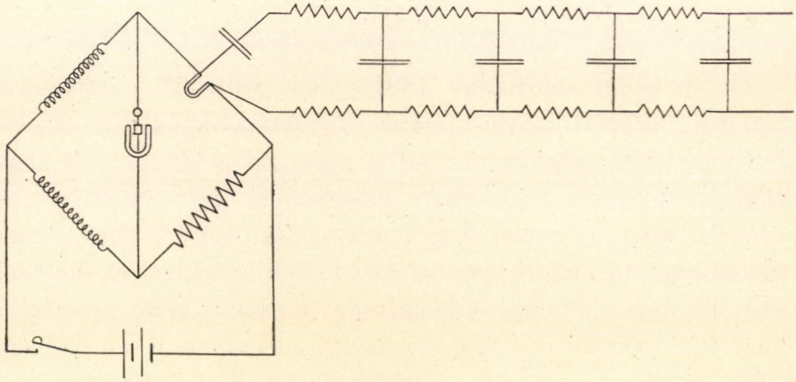
* Előadatott a Math. Phys. Társ. 1907 január 17-iki ülésén.

Duddell a thermogalvanométernek a Philosophical Magazine-ban közzétett leírása szerint a váltakozó áramot ellenálláson bocsátja át. Az ellenállás felmelegszik az áram következtében s az ellenállás közvetlen közelében alkalmazott thermoelem áramot ad. Az áram tükrös galvanométeren mérhető.



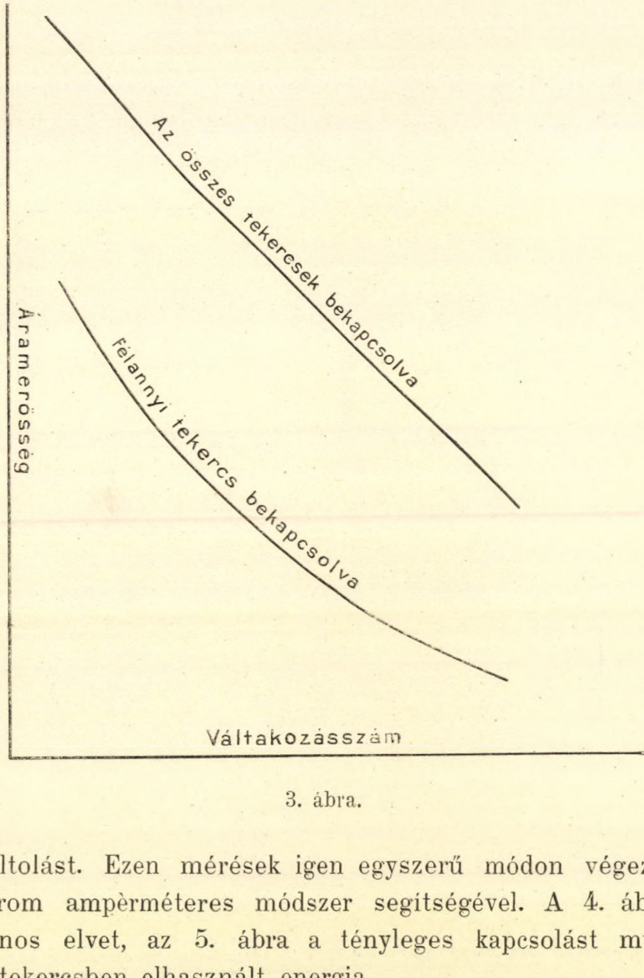
1. ábra.

Ha a hevítő ellenállás 13910 ohm volt, 31 mikroamper 250 mm. kitérést adott 1 méter léptéktávolságnál; 18 ohmos hevítőnél 800 mikroamper adta ugyanazt a kitérést. A nagy ellenállású hevítő czélszerűen használható feszültségmérések-nél. (1. ábra.) A vonal végén a készülék előtt a telefonáram feszültségét megmérhetem, ha meg tudom mérni a készülékkel shuntba kapcsolt nagy ellenálláson áthaladó áram erősségét. Legyen ezen áramerősség J_2 s a hevítő ellenállása r, a feszültség AB pontban $E_2 = J_2 r$; ha például $E_2 = 0.1$ volt $= 100.000 \,.\, 10^{-6}$ $= 100.000$ mikrovolt s $r = 10.000$ ohm, $J_2 = 10 \,.\, 10^{-6}$ amp. $= 10$ mikroamper, a mi még jól mérhető. A 10.000 ohm parallel kapcsolása első pillanatra úgy tünik fel, mintha nem felelne meg a gyakorlati viszonyoknak, különösen messzetelefonálási kisérleteknél; később azonban látni fogjuk, hogy inkább 1000 ohm parallel kapcsolása volna szükséges, hogy a gyakorlati viszonyokhoz tartsuk magunkat. Hasonló eredményt érhetünk el, ha például Rubens-féle hőelemsort hevítünk Duddell hevítő-vel s a hőelemek áramait kis ellenállású érzékeny galvano-méterrel mérjük A Duddell thermogalvanométer érzékenységét azonban ily módon eddig még nem tudtam elérni. Sokkal jobb eredményre jutottam a Fessenden-féle barretter alkalmazá-sával, melynek telefonáramokra való használhatóságát Kennelly írta le a st.-louisi elektromos kongresszus alkalmával. Abszolut mérésekre az érzékenyebb módszer használható, a mely a Wheatstone-hid alkalmazásán alapul (2. ábra). KENNELLY a vonalat kondenzátor közbeiktatásával kapcsolja a barretter-készlethez s így mér a vonal végén áramerősségeket s a vonal végén megérkező áramerősségekből s a vonal elején rákényszerített feszültségből megállapítja a «receiving end inpedance»-ot s ezen inpedanczia alapján következtet a vonal állapotára. A mily czélszerű eljárás ez vonalfelügyelet szempontjából, ép olyan téves következtetésekre ad alkalmat, ha nem elég korrektül alkalmaztatik.



2. ábra.

Így például, ha a váltakozás-számot változtatjuk s a végállomáson a megérkező áramot mérjük, olyan következtetésekre juthatunk, a melyek nem felelnek meg a valóságnak, a mi természetes is, ha meggondoljuk, hogy a telefonáram hullámalakban halad, azaz az áramerősség a vonal minden pontján más és más; a hullámalak pedig változik az alkalmazott frequenczia változásával. Ha valamely frequencziánál például épen a mérőkészülékben kaptuk a maximumot, más frequencziánál már a maximumnál kisebb értéket mérünk. Így kapjuk a 3. ábrában feltüntetett görbét, mely a Wien—Insbruck vezetéken vétetett fel az összes alkalmazott Pupin-tekercsek bekapcsolásával. A görbét elfogadva az tűnik ki, hogy a magas frequencziák erősen le vannak gyengítve, a mit a beszélgetési kisérletek pedig nem bizonyitanak. Ha elfogadható mérést akarunk, úgy a vonal elején, mint a vonal végén meg kell mérnünk a telefonáram erősségét, feszültségét és a kettő közti



3. ábra.

fáziseltolást. Ezen mérések igen egyszerű módon végezhetők a három ampèrméteres módszer segitségével. A 4. ábra az általános elvet, az 5. ábra a tényleges kapcsolást mutatja. A T tekercsben elhasznált energia

$$E_3 J_3 \cos \varphi.$$

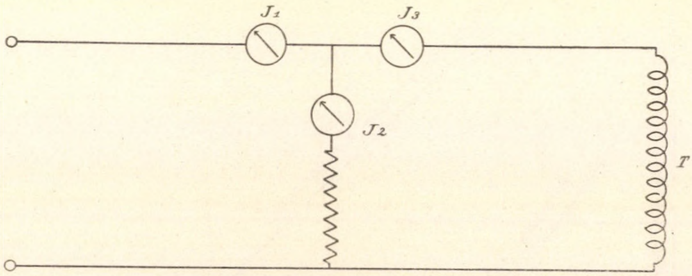
A T tekercsben és a 3. hidban, illetőleg a 3. barretterben elhasznált energia, mivel a barretter csak tisztán ohmikus ellenállás s igy $\cos \varphi$-t nem változtatja

$$E_2 J_3 \cos\varphi;$$

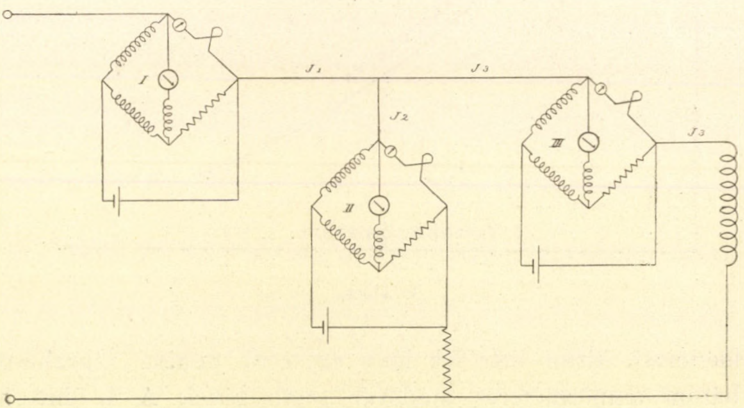
utóbbi kifejezés pedig a három ampères módszer szerint

$$E_2 J_3 \cos\varphi = (J_1^2 - J_2^2 - J_3^2)\frac{R}{2}$$

ismeretes; R, J_1, J_2, J_3 ismeretesek s így $\cos\varphi$ számítható. Hogy a T tekercsben elhasznált energiát megkapjuk, az $E_2 J_3 \cos\varphi$-ből

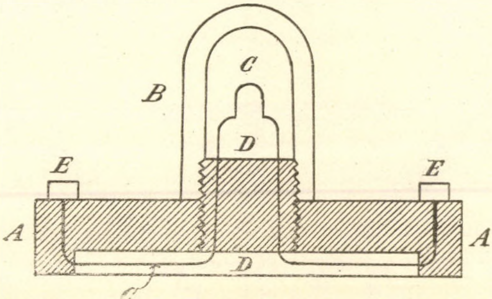


4. ábra.



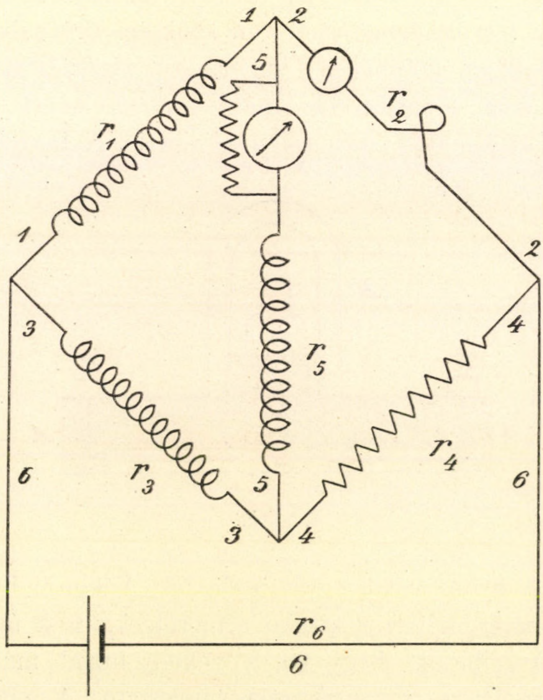
5. ábra.

le kell vonnunk a 3. hidban, illetőleg a 3. sz. barretterben elhasznált energiát, mely azonban a legtöbb esetben oly kicsiny, hogy el is hanyagolható. A T tekercsnél, esetleg kondenzátornál a megmérhető adatok alapján kiszámíthatom a nagy frequencziájú áramnak megfelelő effektiv (ohmikus) ellenállást, az inductivitást, capacitást és esetleg a conductancziát is. Mielőtt azonban erre rátérnék, az alkalmazott rendszer bővebb leírását akarom megadni s kimutatni, mily módon tehető az olyan érzékenynyé, hogy például az J_2 áram is még pontosan legyen mérhető. A st.-louisi elektromos kongresszuson tartott előadásában KENNELLY 2—3 mikroampert jelölt meg, mint még mérhető értéket. Telefonáramoknál az ilyen áramerősség mérésre legfeljebb a feszültségmérésnél van szükség, drótnélküli kisérleteknél azonban, különösen a supermarin vizsgálatoknál szükség lehet még érzékenyebb mérőeszközre, azért kiterjeszkedem az érzékenység növelési módjaira is. A barretter tulaj-



6. ábra.

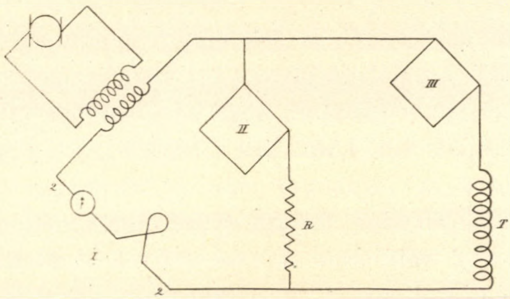
donképen nagyon vékony platinahuzal. Vékony huzalok, a melyek 20 mikrométernél kisebb átmérőjűek, csak úgy szállíthatók és kezelhetők, hogy ha a vékony huzal más fémmel van bevonva, a mely azután róla lemarható. A platinahuzal rendszerint ezüst huzallal burkolva kapható. Mikor a kisérleteket megkezdtem, az európai kontinensen csak 10 mikrométeres huzalok voltak kaphatók. Sikerült kinyujtanom öt mikron vékonyságra. Később a platinagyár is tett kisérleteket és jelenleg már 0.5 mikronos huzalt is tud előállítani. A három mikrométeres huzalról az ezüst lemarása majdnem minden darabnál sikerül; az 1 mikronosnál 60—70% szokott sikerülni; a 0.5 mikronosból 1—2% sikerül csak. Különben nem is kell lemennünk olyan nagyon a vékonysággal, mert ekkor meg a huzalon átbocsátható mérőáram lesz igen kicsi s így rontunk az érzékenységen. A 6. ábra a jelenleg használt mintát mutatja. *A* fiberlap, *B* fiberhüvely, *D* csavarmenetes ebonitdugasz, *C* barretter, *E* szorítók. Szállításnál gummigömbök közé szoríthatjuk a készüléket, hogy a lökések hatása kikerülhető legyen. A barretter a Wheatstone-hid második ágába van bekapcsolva,



7. ábra.

7. ábra; ugyanezen ágban van egy Weston-féle milliampèrméter is. 4—4 ág a barretter kiegyenlítéséhez szükséges ellenállás-szekrényt és egy kis ellenállású csusztató ellenállást tartalmaz. 1—1 és 3—3 ágak 1000—1000 ohmos és nagy inductivitással biró (vasmagos és vashuzallal burkolt) tekercset tartalmaznak. 6—6 ágban van a kis ellenállású telep, 5—5-ben a nagy érzékenységű galvanométer, a shuntökkel és egy nagy inductivitással biró tekercscsel. A hidat úgy állítjuk be, hogy

ha a WESTON milliampèrméter 2 milliampert mutat, a galvanométer ne adjon kitérést. Minthogy 1—1 és 3—3 ellenállások bármily áramerősségnél is egyenlők, a galvanométer zérus helyzetében a barretter és milliampèrméter ellenállásaiknak egyenlőknek kell lenniök a 4—4 ág ellenállásaival. Ha az I. hidat a vonalba kapcsolom, a 2—2 ág ellenállásával parallel van kapcsolva a 8. ábra szerint a váltóáramú forrás és a II. és III. hid ellenállása is. A 4—4 ágban újra kell változtatnom



8. ábra.

az ellenállást, míg a galvanométer nullát mutat. Minthogy a barretter 20 ohm körül van, az R ellenállás 1000 ohmos, az áramforrás tekercse is 100 ohmos, ha a T tekercs nem igen kicsi ellenállású, legtöbbször nem kell sokat változtatni a beállitáson. Ha nem áll három készülék rendelkezésünkre, a barretter, illetőleg az egész hid helyett a barretter ellenállásával egyenlő, nem inductivos ellenállást teszünk. Az elkövetett hiba igen csekély lesz. Az érzékenység számítása végett szükségünk van az 5—5 ágban haladó áramra:

$$i_5 = \frac{B \cdot (r_2 r_3 - r_1 r_4)}{N},$$

a hol r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 a megfelelő ágak ellenállásai, B a telep feszültsége voltban, N pedig

$$N = r_6 r_5 (r_1+r_2+r_3+r_4) \\ + r_6 (r_1+r_3)(r_2+r_4) \\ + r_5 (r_1+r_2)(r_3+r_4) \\ + r_1 r_2 (r_3+r_4) + r_3 r_4 (r_1+r_2).$$

i_5 értéke hét változótól függvén, a maximum megadása nem egyszerű. Előre kimondhatjuk azonban, hogy i_5 annál nagyobb, minél nagyobb B, minél kisebb r_6 és r_5; r_1, r_2, r_3, r_4 választásában már kötve vagyunk. A barretter-ellenállással, hogy a barretter fogyasztotta energia lehetőleg csekély legyen az I_1 és I_3 áramok mérésénél, le kell menni a minimumra. A Wollaston-huzalról a salétromsavba való első bemártás más rendszerint lemar annyi ezüstöt, hogy az ellenállás 20 ohm körül van. r_4-nél is 20 ohm körül kell lennie. r_1 és r_3 nagyra vehető. Legyen például a váltóáram által a 20 ohmos barretterben előidézett hőemelkedés folytán 0.01 ohm az ellenállás növekedése, azaz a váltóáram hatása alatt $r_3 = 20.01$ ohm lesz; $r_4 = 20$ ohm marad, ha $r_1 = r_3 = 1000$ ohm, akkor a B szorzója $1000.20.01 - 1000.20 = 20010 - 20000 = 10$ lesz. $r_1 = r_3 = 100000$ ohmnál $2001000 - 2000000 = 1000$, vagyis 100-szor nagyobb lesz, illetőleg csak lenne, ha N értéke is nem növekednék. A barretteren 1—2 milliamper áramot át kell hajtanunk; ennek megfelelően választjuk a B batteriát.

r_6-tal lemehetünk 1—2 ohmra; r_5 lehet 20 ohm, a White-féle galvanométer még elég érzékeny ezen ellenállásnál. A használt összeállítás adatai a következők voltak:

$r_6 = 1$ ohm; $r_5 = 20.000$ ohm;
$r_1 = r_3 = 1000$ ohm; $r_2 = r_4 = 20$ ohm;
$B = 6$ volt;
$N = 20{\cdot}9 \times 10^{+9}$;

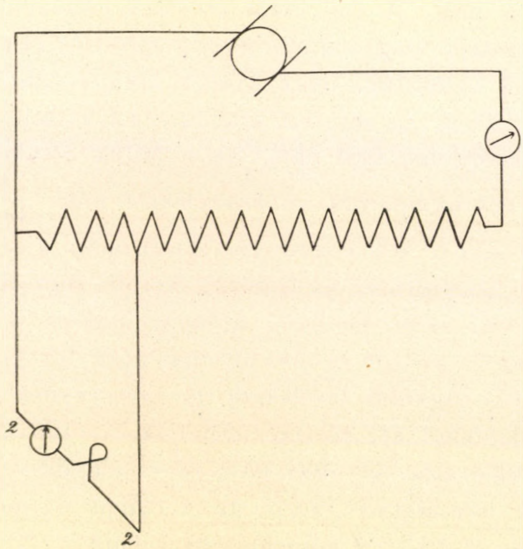
0.01 ohm ellenállás nagyobbodásánál, mint fentebb láttuk a számláló $10B$ lesz.

$$i_5 = \frac{10 . B}{N} = \frac{10 \times 6}{20{\cdot}9 . 10^{+9}} = 2{\cdot}86 . 10^{-9} = 28{\cdot}6 . 10^{-10}$$

az izoláczió mérésre használt $1^\circ = 10^{-10}$ érzékenységű galvanométerrel még jól mérhető. Ha más ellenállásokat választunk, például $r_6=1$, $r_5=20$, $r_2=r_4=20$, $r_1=r_3=1000$, $B=6$, $N=20{\cdot}9\,.\,10^{+6}$, i_5 mintegy $28.000\,.\,10^{-10}$. Nagyobb értéket már nem igen tudunk elérni, mert a mint a számláló nő, úgy nő a nevező is.

0.01 ohm ellenállás növekedésnek kereken 30.000 skálarész eltérés felel meg. A váltóáram erőssége majdnem egyenesen arányos, legalább nagyobb áramnál, a barretter ohm-növekedésével s nem valószínű, hogy kisebb áramra változnék a törvény. Feltételezve az egyszerű arányosságot, minthogy 1 mikrométeres barretternél 0.01 ohm, azaz 30.000 skálarész felelne meg 100 mikroampernek, a készülékkel még $\frac{100}{30.000}$, azaz 0.003 mikroamper volna mérhető. Ha Duddell kisérletei után, a melyeket Angolország és Irország között végzett a drótnélküli táviróval, azon törvényt, a mely szerint a megérkező áramerősség és az adó és vevő állomás közti távolságnak szorzata állandó, nagyobb távolságra is érvényesnek veszszük, a kisérleti adatokból azt következtethetjük ($i=100\,.\,10^{-6}$ amper, $d=60$ mértföld, azaz $id=100\,.\,10^{-6}\,.\,60=$ állandó $=6000\,.\,10^{-6}$), hogy 3000 mértföldnél vagyis az óczeánon át még jól mérhető értéket, $2\,.\,10^{-6}=2$ mikroampert kapunk.

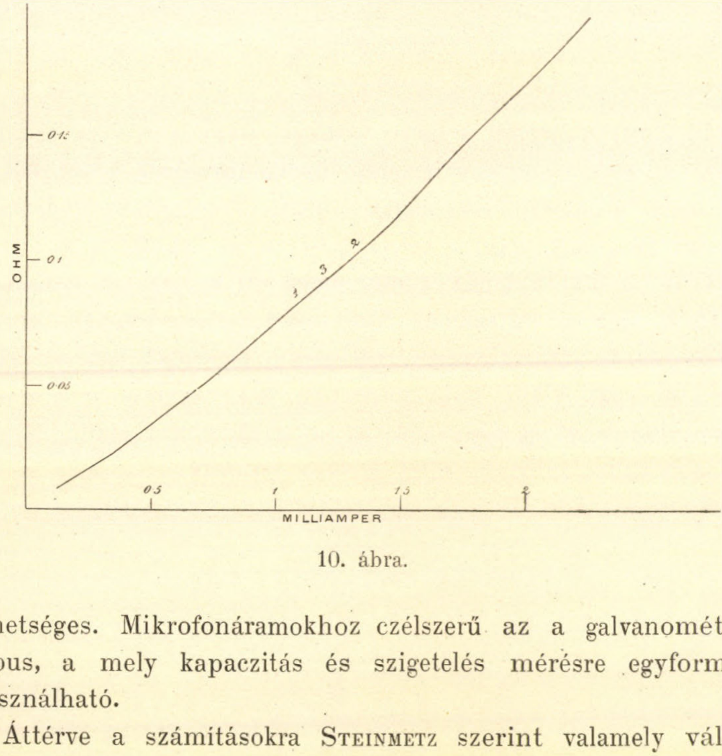
A mérések tényleges véghezvitelét a következőkép végzem: A galvanométert pontosan nullra állitom, miután a telepet úgy szabályoztam, hogy a milliampèrméter például 2 milliamper körül mutat. A váltakozó áramot ráengedve a barretter ad például 92° kitérést. A váltóáram kikapcsolása után a fényfolt nullra tér vissza; most a 4—4 ág ellenállást az ellenállás-szekrényben változtatom, hogy körülbelül 92° kitérést kapjak. Kapok például 0.2 ohm változásnál 95° kitérést. A barretter ellenállás növekedését ilyképen ohmokban fejezem ki. Most az a kérdés, mily áramerősség hozza létre ezt az ellenállás-növekedést? Természetesen legczélszerűbb volna ismert erősségű váltóáramot bocsátani a barretterbe s így dönteni el a kérdést. Le lehetne shuntből ágaztatni vagy letransformálni mérhető váltóáramot, például a 9. ábra szerint. Ez a mód nem állott rendelkezésemre, azért a hitelesitést egyenárammal végeztem. A telepet növeltem s ennek következtében 2—2 ágon átmenő áram erőssége nőtt, a barretter ellenállása változott; így például 1 milliampernek megfelelő kitérés 200 volt, a null helyzetre visszatérve a 4—4 ág ellenállását 1 ohm-



9. ábra.

mal kell változtatnom, hogy 190° kitérést kapjak, 1 milliamper egyenáram növekedés $\frac{200}{190}$ ohm ellenállás növekedést hoz létre. A felvett görbe a 10. ábrában van lerajzolva; az egyenestől a görbe nem igen tér el, úgy hogy közeleső pontok egy egyenesben fekvőnek vehetők s elégséges 1 és 2 pont ismerete, hogy $y=m+bx$ alapján az y_3-nak megfelelő x_3-at pontosan megkapjuk. A milliampèrméteren 0.01 milliamper még leolvasható volt, pontosabb méréseknél a milliampèrméter helyett kis ellenállású galvanométert is alkalmazhatunk.

Mikrofonáram méréseknél a Wheatstone-hid galvanométerének lassú mozgásúnak kell lenni. A barretter-ellenállás növekedése és csökkenése ugyanis majdnem momentán, úgy hogy a beszélő egyén hangszüneteit, a melyet fülünk épúgy nem érez meg, mint szemünk nem veszi észre a nullaáramot a váltóáramú izzótestnél, a barretter megérzi s ha az egyenáramú galvanométer nem lassúbb viselkedésű a barretternél, akkor a tükör fényfoltja folytonosan mozog s a leolvasás nem



10. ábra.

lehetséges. Mikrofonáramokhoz czélszerű az a galvanométertypus, a mely kapaczitás és szigetelés mérésre egyformán használható.

Áttérve a számításokra STEINMETZ szerint valamely váltóáram körében ez a képlet érvényes:

$$e+je' = (r-jx)(i+ji') \tag{1}$$

$e+je'$ az elektromotoros erő, $i+ji'$ az áramerősség; r az effektiv ohmikus ellenállás, x a reactanczia, $x=2\pi wl$; w a frequenczia, j az inductivitas. A mérőáram feszültsége és árama között a fáziseltolást úgy kapjuk, ha a T tekercs helyett ohmikus ellenállást teszünk, ekkor csak a gép, transformator stb. által előidézett fáziseltolás van meg, vagy pedig a váltóáramú géppel a későbbi méréseknek megfelelő ohmikus ellenállások mellett rezonancziára állitunk be. A rezonanczia esetében $\psi = 0$ s így

$$E \cos \psi = e; \quad E \sin \psi = e' = 0.$$

A T induktivos tekercs fáziseltolást hoz be, a mely az J_3-ban nyerhet kifejezést:

$$J_3 \cos \varphi = i,$$
$$J_3 \sin \varphi = i'.$$

Az 1) alatti képletből a mért értékek alapján r és x számítható; ugyanis a realis és imaginárius mennyiségek külön-külön egyenlők. Valamely tekercsnek effektiv ellenállása majdnem kétszerese annak, a mit a kényelmes egyenárammal való mérés kiad. Az induktivitásnak eddig megadott értékei szintén nem felelnek meg a valóságnak. Vas lévén a tekercsekben, az induktivitás az áramerősséggel változik s más-más lesz az érték 10—100 vagy 1000 mikroampernál. A kapaczitás még a legállandóbb, de itt is egész más az az érték, a mit conductancznak nevezünk, mint a mihez szokva vagyunk.

Gáti Béla.

PHYSIKAI SZEMLE.

Izzó elektródok szerepe a gázok elektromos vezetésében. (Oxidkathódsugarak, elektromos szelepcsövek, anódsugarak.)

a) Oxidkathódsugarak.

Régóta ismeretes, hogy izzó fémek elektromos vezetőképességgel ruházzák fel a környezetükben lévő levegőt. Ritka gázt tartalmazó, elektródokkal ellátott csőben különösen érdekes módon nyilvánul a fémek ezen tulajdonsága: még HITTORF [1] és kevéssel utána GOLDSTEIN [2] tapasztalták, hogy ha ily kisülési cső kathódját fehér izzásig melegítették, aránytalan kisebb feszültség elegendő volt a kisülés létesítésére mint hideg kathódnál, az anód izzítása azonban teljesen hatástalan maradt. Ismeretes, hogy a csőben fellépő összes feszültségesés legnagyobb része a kathód közvetlen környezetére esik (kathódesés); ugyancsak rohamos, de jóval kisebb esés tapasztalható az anód közelében (anódesés), míg a cső egyéb részeiben a feszültség aránylag lassan változik. HITTORF és GOLDSTEIN kisérletei azt mutatják, hogy a fehérizzó fémek leszállítják a kathódesést, de nincsenek befolyással az anódesésre.

J. A. CUNNINGHAM [3] mennyiségi kutatásokat végzett ez irányban és azt találta, hogy a kathódesés a kathód hőfokával körülbelül 1600° C-ig alig változik, azontúl azonban rohamosan kisebbedik. WEHNELT azt tapasztalta, hogy ha az elektródok nem nagy gonddal tisztított platinából valók, akkor már mintegy 800° C-nál a kathódesés rohamos csökkenése tapasztalható. WEHNELT ezek után rendszeresen kutatott ama tisztátalanságok után, melyek a kathódesés csökkenését okozhatták és ezen az úton igen figyelemreméltó eredményekre jutott, melyet az Ann. d. Phys. 14. kötetében (425—468. l. 1904) és 19. kötetében (138—156. l. 1906) ír le részletesen.

A hatásos «tisztátlanságok» kikeresésére WEHNELT oly csövet használt, melynek egyetlen anódja volt, de sok (10) kathódja. E kathódok egyenlő vastagságú és felületű vékony platinalemezekből állottak, melyek

---

1 Ann. d. Phys. und Chemie (3. sorozat) 21. k. 119. l. (1884).

2 Ann. d. Phys. und Chemie (3. sorozat) 24. k. 79—92. l. (1885).

3 Philosophical Magazine (7. sorozat) 4. k. 684—703. l. (1902).

mindegyikét akkumulátor segélyével izzásba lehetett hozni és külön-külön a nagy feszültségű áramforrás (600 Voltos akkumulátortelep) negativ sarkával összekötni. A lemezek közül egy tiszta maradt, a többieket különböző anyagokkal vonta be, melyeknek hatását vizsgálni akarta. Hideg kathódok esetén természetesen a 600 Voltnyi feszültség nem volt elegendő ahhoz, hogy kisülést hozzon létre, ha azonban a kathódok valamelyikét megfelelő magas hőfokra hevítette, a kisülés megindult. A tiszta platinakathódnál WEHNELT is azt tapasztalta, hogy a kisülés csak mintegy 1600° C. mellett indult meg, talált azonban sok anyagot különösen *fémoxidokat*, melyeknél már aránylag gyenge izzítás mellett megindult a kisülés. Az oxidokat úgy állította elő, hogy a platinát az illető fém nitrátjának oldatával vonta be és megszárította; izzítás által azután a nitrátok átalakultak oxidokká. A leghatásosabbaknak mutatkoztak a bárium, sztronczium és kalcziumoxidok, már kevésbbé hatásosak a magnézium, czink és kadmiumoxid, teljesen hatástalanok az aluminium, thallium, titánium, cerium, végre a vascsoport és a horganycsoport fémeinek oxidjai, oly értelemben, hogy ily oxidok alkalmazása mellett a kisülés ugyanazon hőfoknál indult meg mint a tiszta platinánál.

Az iónelmélet szerint e jelenség úgy magyarázható, hogy az izzó fémoxidok negativ iónokat bocsátanak ki magukból; ha ugyanis az izzó fémoxid kathóddá lesz, a keletkezett iónokat el fogja magától taszítani s így a negativ iónoknak az anód felé való áramlása jön létre, mely tehát megkönnyíti az elektromos áramnak az anódtól a kathód felé haladását. Ha ellenben az izzó oxiddal bevont fém anód, akkor a keletkezett negativ iónokat az anód eltaszítja magától s a negativ iónoknak így létrejövő áramlata nemhogy elősegítené, hanem még akadályozza is az elektromos áramlatnak az anódtól a kathód fele való haladását.

WEHNELT részletesen megvizsgálta kisérleti úton ez iónelméleti felfogás folyományait: feltéve, hogy adott hőmérsékletnél valamely fémoxid mindig ugyanannyi negativ iónt bocsát ki magából, világos, hogy egy bizonyos áramerősségig ezen iónok mozgása elősegíti az elektromos áramlást, tehát kis áramerősségek fentartására aránylag kis feszültségekre lesz szükség. A negativ iónok mozgása azonban csak addig lesz ily kedvező az áram fentartására, a míg a másodperczenkint keletkező iónok töltése kisebb az áram erősségénél; a mint ugyanis az áram erőssége nagyobb, azaz másodperczenkint több iónnak kellene távozni a kathódtól, mint a mennyit a fémoxid kibocsát, akkor a kathód közelében csökkenne a negativ iónok száma, az áramlás nagyobb akadálylyal jár, a feszültség (a kathódesés) tehát ismét növekedni kezd. Minthogy pedig a kibocsátott iónok száma a fémoxid felületétől függ, minden hőmérséklet mellett lesz egy oly áramsűrűség (áramerősség osztva az oxidfelület nagyságával), melyen túl a cső feszültsége ismét rohamosan nőni kezd. WEHNELT az elméletnek ezen eredményét kisérletileg pontosan beigazolva találta és meg is határozta az oxidok különböző hőmérséklete mellett azon ú. n. *határáramsűrűséget*, melynél a cső ellenállása (a feszültség és az áramerősség viszonya) rohamosan növekedni kezd. E határáramerősség tehát tulajdonképen mértéke a másodperczenkint a fémoxid felületegysége által kibocsátott negativ iónok számának. *CaO* esetén WEHNELT a következő adatokat nyerte arra az esetre, midőn a nyomás a hideg csőben körülbelül 0·01 mm. higany nyomásának felelt meg:

hőmérséklet:	945	1012	1075	1133	1192	1252*	1313	1367	1485
határáramerősség milliamp.:	0·1	0·56	1·68	5·6	11·8	26	35·4	56·1	700
határáramsűrűség $\frac{\text{milliamp.}}{\text{cm}^2}$	0·24	1·2	3·57	12	25	55	75	120	1500

A *-gal jelölt hőfokon túl a nagy áramerősség folytán jelentékeny melegedés állott be, mely miatt a nyomás egész 1 mm-ig is felemelkedett. A hatásos oxidfelület e kisérleteknél 0·47 cm^2 volt. A határáramerősségnek megfelelő kathódesés meglepően csekély (1—2 Volt) úgy, hogy az egész csőben a feszültségesés, beleértve az anódesést is, körülbelül 18—20 volt. Ily alacsony feszültségek mellett tehát aránylag erős áramokat lehet a csövön átvezetni, úgy hogy a cső ellenállása a határáramon aluli áramokra 1500° C-nál csak mintegy 30 ohm volt, míg hideg állapotban több ezer voltnyi feszültség kell az áram átvezetéséhez, akkor is az ellenállás csak millió ohmokban fejezhető ki.

Összehasonlítva ezen eredményeket a tiszta platinaelektródokon végzett mérésekkel, ama meglepő tapasztalatra jutunk, hogy az izzó oxidelektródok *mintegy ezerszer annyi negativ iónt bocsátanak ki mint a tiszta platinaelektródok.*

WEHNELT e jelenséget arra használta fel, hogy igen erős kathódsugárzást állított elő, sokkal kisebb feszültség segélyével, mint a milyenre a kathódsugarak rendes előállításánál szükség van. WEHNELT ugyanis oly kathódcsövet készített, melyben a kathód vékony platinaszalag, melyet két vezeték közvetítésével izzítani lehetett; a platinaszalag közepére egy kis kalcziumnitrát foltot alkalmazott, mely az izzítás által kalcziumoxiddá alakult át. Az izzó elektródot összekötötte egy akkumulátortelep negativ sarkával, a csőnek másik elektródját pedig a pozitiv sarokkal. A míg a telep feszültsége oly kicsiny, hogy a csövön keresztülmenő áramlat nem üti meg az előbb említett *határáramsűrűséget*, a keletkező iónok bőven elegendők az áramlás közvetítésére, a cső ellenállása kicsiny, kicsiny a kathódesés is s az iónok csak igen kis sebességgel ruházódnak fel, tehát kathódsugárzás nincs. Ha azonban a telep feszültségét növeljük, az áramerősség növekszik, s ha a határáramsűrűséget túllépjük, már nem keletkezik annyi negativ ión, mint a mennyire az áramlásnak szüksége van, a kathód környékén megfogynak az iónok, növekszik a csőnek ellenállása, növekszik a kathódesés és a kathód közelében így fellépő jelentékeny elektromos erő mind nagyobb sebességgel röpíti el a kathódtól a negativ elektronokat: így jön létre a kathódsugárzás.

Látható ebből, hogy ilyenformán módunkban van a telep feszültségének fokozatos változtatása által tetszésszerinti feszültségű, tehát tetszésszerinti sebességű kathódsugarakat előállítani. WEHNELT így már néhány száz Volt feszültségű teleppel gyönyörű kathódsugárnyalábot kapott, míg hideg kathódnál a sugárzás előállításához többször tízezer Voltra van szükség.

A WEHNELT-féle kathódsugarak igen élesen határolt kék nyalábot alkotnak,* mely a kalcziumoxid foltról indul ki; érthető az éles határ, mert a sugárzás csak az oxidfolt körül jön létre, a hol a negativ iónok oly óriási számban keletkeznek. WEHNELT lemérte azt az elektromosságmennyiséget, melyek e kis sebességű «oxidkathódsugarak» magukkal szállítanak s azt aránytalanúl nagyobbnak találta, mint a közönséges kathódsugaraknál; WEHNELT mérései szerint az oxidkathódsugarak 2—3 tized milliampère erősségűek, tehát néhány százszor annyi elektromosságot szállítanak magukkal mint a hideg kathódról kiinduló sugárzás.

Az oxidkathódsugarak — kicsiny lévén a sebességük — igen könnyen téríthetők el mágneses és elektrosztatikus térben. Ez által e sugarak még nyernek érdekességükben, mert sokkal gyengébb terekben lehet velük ugyanazon kisérleteket végezni, a melyek a közönséges kathódsugarakkal csak aránytalanúl erősebb terekben tapasztalhatók. Így például sokkal érzékenyebb BRAUN-féle csövet lehet oxidkathódsugarakkal összeállítani, mert e sugarak is keltenek foszforeszkálást, bár valamivel gyengébben, mint a közönséges kathódsugarak.

A mágneses eltérítés és a kathódesésből WEHNELT ki is számította sugarainak sebességét és egy-egy elektron töltésének tömegéhez való viszonyát $\frac{e}{\mu}$-t. A megvizsgált sugarak sebessége 8·5 Volt kathódesésnél 1600 kilométer másodperczenkint és 10,700 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{sec}}$ 342 Voltnál; $\frac{e}{\mu}$ értéke

* A WEHNELT-féle kathódsugarakat dr. KLUPATHY JENŐ, egyetemi tanár úr a M. Ph. Társulat 1907. évi közgyűlésén bemutatta s az ő szives beleegyezésével közlöm ezen ismertetést.

enm volt nagyon megbizható módon meghatározható, de nagyságrendje ($1{\cdot}5 . 10^7$) megegyezik az eddigi más sugarakra vonatkozó eredményekkel, a mi valószínűvé teszi ama föltevést, hogy bármely anyagból bármily úton keletkező negativ elektronok mind egyformák.

Tudjuk, hogy ha a kathód ki van lyukasztva, a kathódsugárzással ellentett irányban pozitiv iónok röpülnek tova az ú. n. *csősugarakat* hozva létre. Az elmélet szerint e sugárzás úgy keletkezik, hogy az elektromos erő kettészakítja a semleges atómokat pozitiv és negativ iónokká, a negativokat a kathód eltaszítja magától a pozitivokat vonzza. Ha a kathód lyukas, a felé rántott pozitiv részecskék e lyukon át tovaröpülnek, míg ellenkező esetben a kathódba ütődve töltésüket és sebességüket elveszítik. WEHNELT megvizsgálta azt is, vajjon ha a kathódot az oxidfolt közepén kilyukasztja, nem kap-e különös viselkedésű csősugárzást; és valóban mintegy 50 V. feszültségnél tényleg megjelentek az oxidcsősugarak, melyek azonban annyira szétszórt nyalábokat alkottak, hogy méréseket végezni velük még eddig nem sikerült. Valószínű pedig, hogy e csősugarak is — kis sebességüknél fogva — könnyebben hajlíthatók el mágneses térben, mint a közönséges csősugarak, melyek mágneses elhajlítását — nagy tömegüknél fogva — csak körülményes kisérleti berendezéssel lehet kimutatni.

b) Elektromos szelepcsövek.

WEHNELT mérései szerint az izzó fémoxid elektródok az anódesést csak jelentéktelen mértékben befolyásolják. Ha tehát oly vákuumcsövünk van, melynek egyik elektródja izzó fémoxid, másik elektródja hideg fém, a cső a hideg elektródból az izzó elektród felé irányuló áramlással szemben kevés ellenállást gyakorol, mivel az izzó fémoxidnál a kathódesés igen kicsiny. Ha ellenben az áramlás az izzó elektródból a hideg felé irányul, a cső ellenállása igen nagy lesz, mert akkor az áramlásnak a normális anódesést és kathódesést kell legyőznie. A cső tehát különböző irányú áramokkal szemben különböző ellenállást tanusít, például váltakozó áramnak csak az egyik irányú áramlökéseit fogja átengedni, úgy viselkedik mint egy elektromos szelep, elektromos *egy irányító.*

Ily elektromos egyirányítók készítése régi feladata az elektrotechnikának: az elektromos energia takarékos szállítása nagy távolságokra csak nagy feszültség mellett lehetséges, a mai dinamógépekkel pedig csak váltóáramnál lehet a nagy feszültséget előállítani, így is még az energiatermelés helyén az áramot feltranszformálják s a fogyasztási helyen letranszformálják. A váltóáramot azonban közvetlenül nem mindig használhatjuk; bizonyos ipari és kisérleti czélokra azt előbb át kell alakítani egyenárammá. Ezen átalakítás legegyszerűbben ú. n. motorgenerátorral történik: a váltóáram mótort táplál, a mely egyenáramú dinamógépet forgat; nagy üzemben majdnem kizárólag ezt az eljárást alkalmazzák. Laboratóriumi czélokra, a hol a motorgenerátor felállítása nem mindig lehetséges vagy czélszerű, használták eddig a GRAETZ-POLLÁK-féle elektrolitikus aluminiumczellákat, melyek az aluminiumnak ama különös sajátságán alapszanak, hogy elektrolitikus czellában anódnak használva aránytalanúl nagyobb az ellenállása, mint kathódul alkalmazva; ugyancsak egyirányító gyanánt szolgálhat a HEWITT-féle higanylámpa. Hasonló czélra előnyösen alkalmazhatók a WEHNELT-féle izzó fémoxidos vákuumcsövek is.*

A WEHNELT-féle egyirányító csak akkor takarékos, ha a rajta keresztülbocsátott áram sűrűsége az ú. n. határáramsűrűségen alul marad, addig ugyanis a kathódesés igen kicsiny; ez azonban nem akadálya annak, hogy *több ampèrenyi* áramot lehessen a vákuumcső segítségével egyirányítani. Különös gondot okozott WEHNELTnek az, hogy a cső, ott a hol a kathód melegítésére szolgáló fémdrótok az üvegbe be voltak forrasztva, nagyobb áramerősségnél megrepedt. WEHNELT tehát a hozzávezetéseket úgy készítette, hogy az üvegfalba közvetlenül vékonyfalú platinacsöveket forrasztott és ezen platinacsövekhez forrasztotta a hozzávezetésre szolgáló vastag drótokat s így az áram fejlesztette hő nem az üveg-fém forrasztási hely közvetlen közelében keletkezik.

WEHNELT többek közt lemérte a cső hatásfokát abban az esetben is, midőn váltakozó áramot és szelepcsövet használt akkumulátortelep töltésére. A keletkező egyenáram energiájának viszonya a váltakozó áram energiájához, a szelepcső hatásfoka a legkedvezőbb esetben mintegy 55 százalék, tehát megközelíti az 1—2 lóerős, kisebb egyirányító motorgenerátorok hatásfokát.

Az egyirányító feszültsége oly áramokra, melyek a hideg fémből az izzó fémoxid felé tartanak körülbelül 20 Volt, ellenkező irányú áramokra több ezer Volt.

Az egyirányító egyformán jól használható lassú és gyors váltakozású áramoknál; WEHNELT eleinte 43, később 200 váltakozási számmal dolgozott, de teljesen kielégítő eredményeket kapott Teslaáramoknál is, a hol a rezgésszám több százezer.

Ha a cső anódját szűk üvegcsővel vette körül, akkor igen nagy feszültségű áram egyirányítására is használható; ez különösen RÖNTGENcsöveknek hajtásánál fontos, mert az egyirányú áramlökésekkel táplált csőben az anódból és az antikathódból nem indul ki kathódsugárzás s a jelenség tisztább.

* Ann. d. Phys. 19. k. 138—156. l. (1906).

WEHNELT a szelepcsövet szikrainduktor primér tekercse elé is kapcsolta, hogy az elektrolitikus áramszaggató egyenáramot kapjon, a mely esetben nyugodtabban jár, mint váltakozó árammal való tápláláskor, készített azonkívül oly szelepcsöveket is, melyek háromfázisú váltakozó áramot alakítanak át egyenárammá, továbbá több oly összeállítást említ, melynél a váltakozó áram mindkét irányú lökése alkalmas kapcsolással ugyanoly irányú egyenáramlökésekké alakul át, mely kapcsolások közül többet használtak már eddig is az aluminium egyirányitóknál is. Összefoglalva a mondottakat kijelenthetjük, hogy a WEHNELT-féle izzó fémoxidos szelepcső igen érdekes és különböző kisérleteknél jól használható eszköz.

c) Anódsugarak.

WEHNELT megvizsgálta, vajjon nem változik-e az anódesés is, ha anód gyanánt az izzó fémoxidok szolgálnak. HITTORF[1] és GOLDSTEIN[2] már tapasztalták, hogy az anód hőmérséklete nem igen befolyásolja a cső feszültségét, CUNNINGHAM[3] pedig pontosan lemérte, hogyan változik tiszta platinanód esetén az anódesés az anód hőmérsékletével s azt találta, hogy az anódesés az anód növekvő hőmérsékletével gyengén fogy. WEHNELT izzó fémoxidokat használt anód gyanánt (a kathódesés vizsgálatánál használt sok elektródú csőnél) és ugyancsak némi csökkenését tapasztalta az anódesésnek a hőmérséklet növekedésével; a változás azonban ugyanolyan rendű volt mint CUNNINGHAM tiszta platinanóddal végzett kisérleteinél, a miből WEHNELT arra következtetett, hogy a fémoxidoknak az anódesésre lényeges befolyásuk nincs. A jelenség az elektronelmélet alapján meg is érthető, tekintve, hogy az izzó fémoxidok nagy mennyiségű negativ elektront bocsátanak ki; ezen elektronokat ugyanis az anód ismét magához vonzza és elnyeli, saját potencziálja ezáltal persze nem igen változik, mert az elektromosság forrásával van összekötve.

E. GEHRCKÉt e kisérletek ellenére sem mondott le arról, hogy a kathódsugárzásnak megfelelő «pozitiv» sugárzást keresse az anódon. Épen az anódesés jelenlétéből következtetett arra, hogy anódsugaraknak is létezniök kell, elég oly anyagot használni anód gyanánt, mely pozitiv iónokat bocsát ki, akkor az anód pozitiv töltésénél fogva ezen iónokat el fogja magától taszítani és pozitiv részecskékből álló sugárzást fog

1 Wied. Ann. *21*. k. 119. l. (1884).
2 Wied. Ann. *24*. k. 79—92. l. (1885).
3 Phil. Mag. 4. k. 684—703. l. (1902).

létrehozni.[1] Kutatásaiban a véletlen is elősegítette, úgy hogy mult év végén valóban felfedezte O. REICHENHEIMmel közösen a kathódsugarakkal teljesen analóg *anódsugarakat*.[2]

GEHRCKE és REICHENHEIM ugyanis egy WEHNELT-féle oxidkathódos csővel dolgoztak, melynek anódja 3 cm. hosszú és 0·3 cm. vastag platinadrót volt; a mint a 110 Voltos akkumulátortelepet bekapcsolták, észrevették, hogy az anódról élesen határolt, sárgás sugarak indultak ki, melyeknek kiindulási helye kis fénylő terület volt a platinadróton. A jelenség néhány másodpercz mulva eltünt és többé nem volt ugyanazon csővel előállítható még akkor sem, ha az anódot vörös izzásig hevítették. Későbbi vizsgálatok kiderítették, hogy a sugárzás oka a platinadróton lévő tisztátlanságokban keresendő, mely tisztátlanság — valószínűleg az anódon fellépő hőfejlődés hatása alatt — hamarosan elpárolgott. Valóban sikerült nekik a sárga sugárzást újból előállítani, ha a platinanódot kevés konyhasóval vagy boraxszal kenték be. A jelenség azonban nem maradt állandó és már 30 másodpercz alatt teljesen megszünt.

GEHRCKE és társa most már arra törekedtek, hogy oly anódokat készítsenek, melyekre nagyobb sókészleteket lehet helyezni: egy platinalemez megfelelő összehajtogatásával az anódon csőalakú edényt állítottak össze, melyet egy a kathódot fűtőtől elszigetelt akkumulátorteleppel melegítettek. Ha a csőbe nátriumsókat (nátriumkarbonát, nátriumchlorid) helyeztek és az elektródokat 110 Voltos akkumulátortelep sarkaival kötötték össze, az anódból erős sárga, fáklyaszerű fény indult ki, mely egészen a vákuumcső faláig terjedt. Ugyanakkor a kathódból a WEHNELT-féle kék oxidkathódsugarak terjedtek tova s így mindkét elektród egy-egy külön sugárzás forrásaként mutatkozott. Az anódból kiinduló fény színképében erősen látszottak a nátrium *D* vonalai. Néhány *percz* mulva az anódsugarak elhalványodtak és végre teljesen eltüntek és csak az anódon ide-oda ugráló közönséges anódfény maradt meg.

Egészen hasonló eredményt kaptak lithium, kálium, rubidium, cézium, réz, bárium, sztronczium, indium és thalliumsókkal; igen szép, a fémek szerint változó színű anódfáklyák keletkeztek az anódon, melyeknek színképében a megfelelő fém vonalai voltak láthatók.

---

[1] A GOLDSTEIN felfedezte csősugarak nem tekinthetők a kathódsugarak megfelelőinek, minthogy újabb vizsgálatok szerint (GEHRCKE: Physikalische Zeitschrift, 7. k. 181. l., 1906) nem az anódon, hanem a kathód közelében keletkeznek.

[2] E. GEHRCKE és O. REICHENHEIM: Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft, 8. évfolyam, 559. l. 1906.

Hatástalanoknak mutatkoztak az alkaliföldek oxidjai, épen azok, melyek a kathódesést Wehnelt szerint oly jelentékenyen leszállítják. Más oxidokkal sem értek el kedvező eredményt, úgy látszik tehát, hogy az erősen disszocziáló vagy elpárolgó sók segítik elő az anódsugárzást.

Gehrcke és Reichenheim közvetlen kisérlettel azt is kimutatták, hogy az anódsugarak *pozitiv* töltést szállítanak magukkal: ha az anódsugarakat egy ú. n. Faraday-féle hengerben felfogták, melynek belső hengerét egy galvanométeren át a földbe vezették, a galvanométer erős pozitiv kiütést mutatott, mely mindinkább kisebbedett, a mint az anódfáklya elhalványodott, végre egészen megszünt, sőt — a teljesen el nem fogható kathódsugarak hatása alatt — negativ is lett. Megkisérlették a sugarakat mágnessel eltériteni és valóban tapasztalták a fáklya elhajlását, ezen első kisérleteiknek azonban nem tulajdonítanak nagy fontosságot, tekintve, hogy a csőben látható egész fényjelenség mágneses térben gyökeres változást szenved.

Hogy egyrészt a jelenséget állandósítsák, másrészt pedig nagyobb sebességű anódsugarak is előállíthatók legyenek, Gehrcke és Reichenheim oly csöveket készítettek, melyeken maga az anód *sóból* való: vékony üvegcsövet megolvasztott sóba mártottak és a sót mintegy 3 cm. magasságra felszívták; kihülés után beleillesztették az áram hozzávezetésére szolgáló fémdrótot s az egészet egész szorosan még egy második csupán a sóelektród fölött nyitott üvegcsőbe zárták. Ha az így előállított vákuumcsövek elektródjait Töpler gép sarkaival kötötték össze, az áram útat tört magának a sóelektródon keresztül és azt annyira felmelegítette, hogy külön izzításról, mint az előbbi kisérleteknél nem is kellett gondoskodni. Legalkalmasabb elektródanyagnak találtak bizonyos keveréket, mely lithiumbromid, lithiumjodid, nátriumjodidból és kevés grafitporból állott. A grafit szerepe lényeges, a nélkül a jelenség sokkal gyöngébb; grafit helyett czinkpor is használható; valószínűleg a tiszta sóknak túlságos nagy az elektromos ellenállása.

Igen magasfokú ritkításnál ragyogó anódsugarak keletkeznek, melyek annál «hosszabbak», minél nagyobb a ritkítás foka; a leghosszabb anódsugarak, a melyeket eddig megfigyeltek, 25 cm-nyi darabon voltak láthatók. A hol az anódsugarak az üveg falába ütköznek, fluoreszkálásra bírják az üveg falát; a fluoreszkáló fény színképe ugyancsak a sóelektród «fémének» színképét mutatja.

Legújabban Gehrcke és Reichenheim a német orvosok és természetvizsgálók dresdeni gyűlésén rendkívül érdekes az anódsugarakra vonatkozó *mennyiségi* vizsgálatokról tettek jelentést.*

---

* Physikalische Zeitschrift 1907. évf. 724, 726 l.

Az első kérdés, melylyel foglalkoztak a következő volt: Világítanak-e maguk az anódsugárban jelenlévő részecskék, avagy csak világításra bírják a gázrészecskéket, melyeken keresztülhaladnak? Ha maguk az anódsugárrészecskék világítanak, a kibocsátott fény hullámhosszának DOPPLER elve szerint meg kell változnia úgy, a mint STARK a csősugarakon tapasztalta.* Ez esetben tehát, ha a fénysugarak színképét az anódsugarak mozgásának irányában vizsgáljuk, a színkép minden egyes vonalát megkettőzve látjuk. Az egyik vonal ama részecskéktől származik, melyek sebességüket az üveg falába való ütközésük folytán már elveszítették, a másik vonal a megfigyelő *felé* mozgó részecskék által kibocsátott fény. A vonalak egymástól való távolságából DOPPLER elve alapján kiszámítható a mozgó részecskék sebessége.

GEHRCKE és REICHENHEIM az anódsugarak esetén valóban tapasztalták a vonalak kettéhasadását és ki is számították belőle az anódsugarak sebességét. A spektroszkópon áthaladó fény annyira gyönge volt, hogy például nátriumelektród esetén viridinlemezen $^3/_4$ órai expozicióra volt szükség, hogy a színkép fényképét előállítsák.

A fényképek kimérése alkalmával tapasztalták, hogy az *eltolódott* vonalak szélesebbek mint az eredeti vonal, a mi azt mutatta, hogy az anódsugarak — ép úgy mint a kathódsugarak — különböző sebességű részecskékből állanak, melyek vonalai tehát különböző eltolódást szenvednek.

A mérések eredményei a következők voltak: jelölje λ a nyugvó részecske által kibocsátott fény hullámhosszát, $\delta\lambda$ a hullámhossz megváltozását a részecskének a megfigyelőhöz viszonyított v sebessége folytán. Ha c a fény terjedési sebessége, akkor DOPPLER elve szerint

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{v}{c};$$

$\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ kisérletileg meghatározható.

Nátriumklorid elektród esetén a legnagyobb eltolódás esetén

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda}=0{\cdot}455\,.\,10^{-3}$$

volt, míg a középeltolódásnál

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda}=0{\cdot}33\,.\,10^{-3};$$

ennek megfelelően a sugarak legnagyobb sebessége $v=140$ kilométer, míg a középsebesség 110 km. másodperczenkint. A sebességek jóval kisebbek, mint azok, melyeket csősugaraknál találtak, a mi érthető is,

* J. STARK: Phys. Zeitschr. 892—897, (1905).

mert az anódesés jóval kisebb, mint a kathódesés, melynek a csősugárrészecskék sebességüket köszönhetik. Az anódesés ismeretéből különben egy-egy részecske elektromos töltésének (e) tömegéhez (m) való viszonyát is kiszámíthatjuk. Feltéve ugyanis, hogy a részecskék sebességüket az anódesésnek (V) köszönik, az eleven erő tétele alapján a következő egyenletet kapjuk:

$$eV = \tfrac{1}{2}\,mv^2.$$

Gehrcke és Reichenheim egy az anód közelében elhelyezett segédelektróddal lemérték V-t és körülbelül 2200 Voltnak találták; innen $\frac{e}{m} = 0{\cdot}45 \,.\, 10^3$ *c. g. s.* elektromágneses egységekben. Hidrogénre nézve az elektrolizisből ismeretes $\frac{e_H}{m_H} = 9{\cdot}5 \,.\, 10^3$. Minthogy általában fel szokás tenni, hogy az iónok elektromos töltése (e) ugyanaz, az $\frac{e}{m}$-ek viszonyából megkapjuk az anódsugárrészecske tömegének viszonyát a hidrogénrészecske tömegéhez; a jelen esetben $\frac{m}{m_H} = 21$, a mi közel áll a nátrium atomsúlyához (23·05). E kisérlet tehát világosan mutatja, hogy az anódsugárban pozitiv töltésű nátriumatómok mozognak, ha az anód konyhasóból való.

Gehrcke és Reichenheim a részecskék sebességét és az $\frac{e}{m}$-et még a mágneses eltérítésnek jól ismert módszerével is meghatározták. Sikerült ugyanis nekik az anódsugarak mágneses elhajlíthatóságát most már kifogástalanul kimutatni és le is mérni.

Méréseket végeztek nátrium, sztronczium és lithiumsókból való anódokkal és minden esetben kielégítő pontossággal megkapták az $\frac{e}{m}$-ek alapján a sóelektrod fémalkatrészének atómsúlyát. Tekintve, hogy a sztronczium két vegyértékű, a sztronczíumra vonatkozó számításoknál feltették, hogy egy sztrončziumrészecske kétszer akkora elektromos töltést visz magával, mint a hidrogénión, s így kapták meg a sztronczium helyes atomsúlyát.

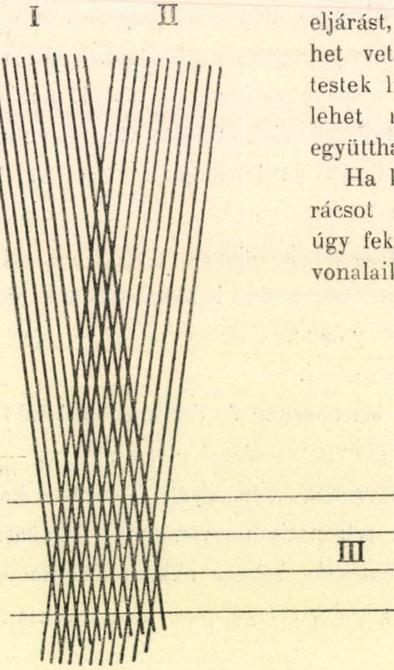
Ezen figyelemreméltó vizsgálataikkal Gehrcke és Reichenheim bebizonyították, hogy az anód is ép úgy kiinduló pontja lehet egy elektromozott részecskékből álló sugárzásnak s ilyenformán legalább részben megszüntették a kathód nehezen magyarázható, eddigi kiváltságos szerepét a gázok elektromos vezetését kisérő jelenségekben.

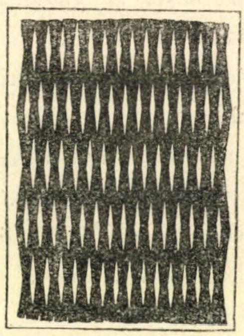
Zemplén Győző.

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Kis hosszúságváltozások vetítésben való bemutatása. U. Behn írja le a Verhandlungen der deutschen phys. Gesellschaft 1906. évi folyamában (205. l.) a következő egyszerű eljárást, melylyel például igen jól lehet vetítésben bemutatni a szilárd testek hőkiterjedését és elég pontosan lehet meghatározni a hőkiterjedési együtthatót is.

Ha két üvegre rajzolt egyenlőközű rácsot (a mellékelt ábrán I. és II.) úgy fektetünk egymásra, hogy a rácsvonalaik igen közel párhuzamosak





legyenek egymáshoz a III.-mal jelzett egyenesekkel párhuzamos sávrendszer keletkezik, melynek épen a felrajzolt egyenesei jelzik a legvilágosabb részeit. Ha az I. és II. rácsvonalaknak egymással képezett hajlásszögét φ-t változtatjuk, megváltozik a III. maximumoknak egymástól való távolsága s ezen távolságváltozás leméréséből φ változása igen pontosan meghatározható, a mi a következő képletekből is világos: legyen c az I. és II. rácsok közös állandója, l a III. rendszerben két egymásra következő maximum egymástól való távolsága, akkor:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{c}{2l}$$

és

$$\frac{dl}{d\varphi} = -\frac{l^2 \cos\frac{\varphi}{2}}{c}$$

kis szögeknél tehát:

$$dl = -\frac{l^2}{c} d\varphi.$$

φ adott változásának tehát l-nek aránytalanúl nagy változása felel meg, minthogy épen kis szögeknél l c-hez képest igen nagy.

A hőkiterjedési együttható mérése például a következő módon történhetik: az I. és II. rácsokat egymásra fektetjük, egy a rácsok egyik szögletén átmenő, a rácsok lapjára merőleges tengelyre szereljük és úgy forgatjuk el egymáshoz képest, hogy φ kicsiny legyen. Az I. rácsot most rögzítjük és a másik rács széléhez illesztjük a hőkiterjedésére megvizsgálandó pálczát. A kiterjedő pálcza elforgatja az egyik rácsot a másikhoz képest, mire a III. sávok eltolódnak; az eltolódásból meghatározható $d\varphi$ s ismerve a pálcza és rács érintkezési helyének a tengelytől való távolságát, a k «kart», kiszámítható maga a hosszúságváltozás $ds = kd\varphi$.

Behn a sokszorosító iparban használatos rácsokat használt; ha $c =$ 0·185 mm, $k = 10$ mm. és $l = 30$ mm, akkor egy 300 mm. hosszú sárgarézcsőnek *egyetlen* fokkal való felmelegítése, mely nem több 0·006 mm. $= 6\mu$-nél az első maximumnak már 3 mm-rel való eltolódását hozza létre. A jelenség könnyen vetíthető egy ernyőre s ha például a vetítőlencse fókusztávolsága 60 mm, akkor egy 6 méter távoli ernyőn az eltolódás már 300 mm, mely már igen jól leolvasható egy az ernyőre helyezett mérőléczen.

Ha a sárgarézpálcza a II. rács helyett ugyanazon karral tükröt fordít el, 6 m. távolságról leolvasva csak 7 mm. eltolódást kapunk.

Előadásokban azt hiszszük a magában véve is érdekes eljárás előnyösen lesz alkalmazható. *Z.*

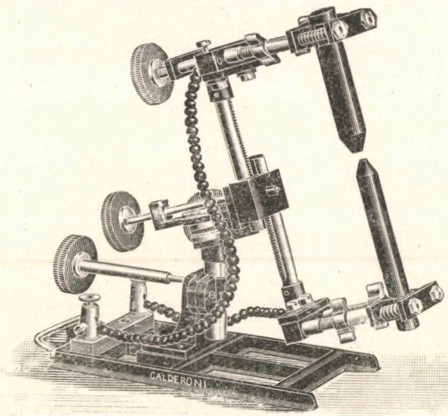
Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **23**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

Villamos ívlámpa



legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—

Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90**.—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27**.—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480 cm. négyzetben
Ára	**40**.—	**58**.-	**75**.—	**82**.—	**98**.—	**130**.—	**180**.—	**224**.— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

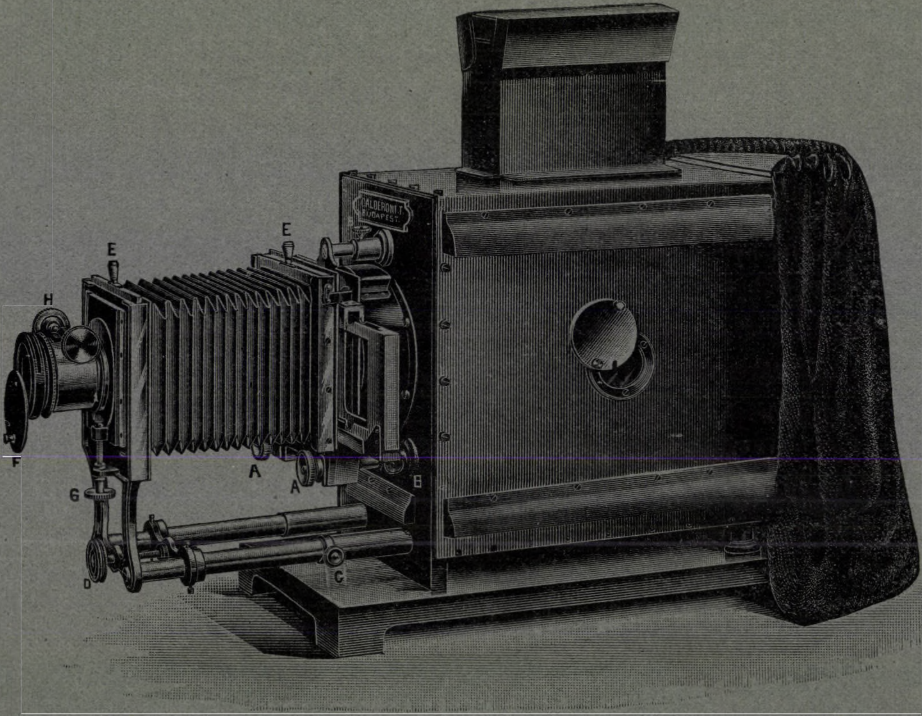
Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K 260.—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHETEDIK ÉVFOLYAM

II–III. FÜZET 1908 FEBRUÁRIUS–MÁRCZIUS.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1908.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhetedik társulati év 1908 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Feichtinger Győző* főreáliskolai tanár (VII., Aréna-út 15) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséert.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

A GEODETIKUS VONALAK ELMÉLETÉHEZ.

1. A felületelméletben alapvető fontossága van e két Gauss-féle tételnek;[1]

a) Ha a felület valamely O pontjából meghuzzuk az egyenlő hosszúságú geodetikus vonalakat (geodetikus radiusokat), akkor ezek végpontjainak geometriai helye, a *geodetikus kör*, a radiusokra merőleges.

b) Ha a görbe felületen egy tetszőleg s e vonalat rajzolunk és ha ennek a vonalnak mindegyik pontjából (ugyanazon oldal felé haladó) a reá merőleges egyenlő hosszúságú geodetikus vonalakat képzeljük, akkor e vonalak végpontjainak geometriai helye (*az e-vel egyenlőközű vonal*) merőleges a húzott geodetikus vonalakra.

Gauss e gyönyörű tételek közül az elsőt először analytikailag bizonyítja be; de azt tartván, hogy érdemes e tételt a legrövidebb vonalak alaptulajdonságából levezetni, az első tételt egyszerű geometriai meggondolással is bebizonyítja. E bizonyítást tér kimélése végett nem akarom itt közölni, csak utalok rá.[2] A második tétel analitikai bizonyítását nem közli ugyan részletesen Gauss, de megmondja az utat, a melyen az előbbihez analog bizonyítás végzendő. Nem így tesz a második tétel geometriai bizonyításával. Erre nézve azt mondja: «Végre megjegyezhetjük, hogy itt is a számítást egyszerű geometriai meggondolás helyettesíthetné, de mivel ez messze vezetne, nem fogunk itt tovább időzni.»

---

[1] L. pl. M. Ph. L. VI. kötetében Gauss értekezését (ford. Szijártó M.), pag. 76.

[2] L. u. o. 75. lapon [az utolsóelőtti sorban C helyett B' és az előző sorban B' helyett C teendő].

Ezen kis megjegyzések előrebocsátása után megmondom, hogy értekezésemben miről szólok. Először is az említett második tételnek ép oly egyszerű geometriai bizonyítását közlöm, mint az első tétel GAUSS-féle bizonyítása. Ezután pedig mindkét tételnek a HILBERT-féle variacziószámítási függetlenségi tétel (Unabhängigkeitssatz) alapján egyszerű bizonyítását ismertetem.[1] Végül pedig kimutatom, hogy az áll. görb. felületen a geodetikus kör csak egy igen speciális esetben, a geodetikus egyenlőközű pedig csakis a 0 görbületű felületen lehet geodetikus vonal. Ez utóbbi állítás ránk nézve azért bír különös fontossággal, mert BÓLYAI FARKAS az ő nagyfontosságú, rendkívül mélyen járó göttingai parallela elméletében[2] azt akarta bebizonyítani, hogy az egyenessel egyenlőközű vonal [azaz az egyenesre emelt egyenlő hosszú ságú merőlegesek végpontjainak geometriai helye] egyenes. A most bebizonyítandó tételből következik, hogy BÓLYAI demonstratiója nem sikerülhetett, mert a görbület 0 voltát semmiféle alakban sem tételezhette fel.

2. A GAUSS-féle első tételt bebizonyítottnak tekintjük. Úgy mint ezen tétel bizonyításánál, de mint minden felületelméleti tárgyalásnál felteszszük, hogy végtelen kis térrészben a síkgeometriai tételek érvényesek. Legyen már most a felületen egy tetszésszerinti e vonal. E vonal A és A_1 pontjai egymástól tetszőleges kis távolságban legyenek. A-ban emeljük az e-re merőleges AB geodetikus vonalat. A_1-ben pedig az ugyanilyen hosszú A_1B_1 geodetikus vonalat. BB_1 legyen az e-hez egyenlőközű vonal egy tetszésszerinti kis szakasza. És tegyük fel, hogy B_1-nél levő (A_1B_1B) szög $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb. Akkor a folytonosság alapján következik, hogy a B-nél levő (ABB_1) szög $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb. [Pontosabban ez azt jelenti, hogy AA_1 oly kicsinynek választható, hogy e szög $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb legyen.]

[1] Az első tételre vonatkozó bizonyítást HILBERT variaczíószámítási előadásai nyomán közlöm, melyeket GOLDZIEHER K. úr kéziratából ismerek.

[2] L. pl. BÓLYAI és GAUSS levelezésében, p. 67.

Keressük meg az AB geodetikus vonalon a C pontot, melyre nézve A_1C geodetikus távolság $=A_1B_1=AB$-vel. Ezen C pont okvetlenül az AB közben lesz, nem pedig a B fölött. Mert a B_1C geodetikus körív [a czentrum A_1] merőleges [az első tétel szerint] az A_1B_1 radiusra, tehát B_1C a tompa B_1 szögön belül vonul. Következésképpen $CA_1 > CA$; mert CA csak része a BA-nak, mely a CA_1-gyel egyenlő.

Mérjük fel a CA_1-re a kisebb CA geodetikus távolságot, azaz határozzuk meg a CA_1-en a D pontot úgy, hogy $CD=CA$ legyen. Ez a D pont az előbbi megjegyzésünk szerint CA_1 közben fekszik.

Huzzuk meg a C czentrumhoz tartozó AD geodetikus körívet. Ez az A_1AC szögön belül vonul, mert a D pont az AA_1 fölött van. De ez képtelenség. Ugyanis az AD geodetikus kör merőleges a CA-ra, tehát nem vonulhat a CAA_1 szögben, mely maga, feltételünk szerint, derékszög. Ezzel kimutattuk, hogy az a feltevés, hogy B_1 szög (vagy B szög) nem derékszög, ellenmondáshoz vezet. A Gauss-féle második tételt tehát bebizonyitottuk.

3. A Hilbert-féle függetlenségi tétel, az újabb variaczió-számítás egyik alaptétele, a következőképpen fejezhető ki:

Ha $F(x, y\ u)$ egy bizonyos tartományban az x, y, u folytonos, egyértékű és kétszer differencziálható függvénye és az x_1, y_1, meg az x_2, y_2 pontok között egy tetszésszerinti szabályos C görbét [folytonos érintőjű] húzunk, akkor ez a görbementi integrál:

$$I=\int\left[F(x,\ y,\ u)+(y'-u)F_{y'}(x,\ y,\ u)\right]dx$$

[melyben y' a C görbe érintőjének az irányhatározója] független a C görbe választásától [tehát csakis az x_1y_1, x_2y_2-től függ], ha u gyanánt az x, y változók azon függvényét választjuk, mely egy bizonyos seregbe tartozó [például az x_1y_1 ponton átmenő, vagy e egyenesre merőleges] Lagrange-görbék [az $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,\ y,\ y')\,dx$ integrálhoz tartozó variacziószámítási differenczíálegyenlet megoldásainak] irányhatározóját választjuk. Ez úgy értendő, hogy az x, y egy bizonyos tartományának, a mezőnek, tetszőleges x, y pontján átmenő individuumát keressük meg a LAGRANGE-görbék seregének és e görbének az (xy) pontban való irányhatározóját választjuk az u függvény ezen (xy)-hoz tartozó értékének.

Legyen már most a felület vonaleleme a szokott jelölésben:

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

és alkalmazzuk a HILBERT tételt arra az esetre, midőn a C görbe a következő zárt görbe: Az O pontból kiinduló OA geodetikus vonal, az OA_1, ugyanilyen hosszú geodetikus vonal és az AA_1 tetszésszerinti vonala a felületnek. A C görbe zárt, tehát az I integrál a feltevéseink mellett: O. F gyanánt választjuk a

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2}$$

függvényt. A LAGRANGE-féle differencziálegyenlet tehát a geodetikus vonal differencziálegyenlete. Így tehát az OA szakaszon, valamint az OA' szakaszon $u = y'$, mert hiszen az OA, illetőleg OA_1 minden pontján át az O ponton áthaladó LAGRANGE-görbe seregből éppen az OA, illetőleg OA_1 geodetikus vonalak haladnak. Így tehát a HILBERT-tétel szerint:

$$O = \int_0^A F(x, y, y')\,dx +$$

$$+ \int_{AA_1} \left[F(x, y, u) + (y' - u)\,F'_u(x, y, u)\right] dx + \int_A^0 F(x, y, y')\,dx.$$

De az első és harmadik integrálok összege 0, mert OA geodetikus hosszúság $= OA_1$, tehát

$$\int_{AA_1} \left[F(x, y, u) + (y' - u)\,F'_u(x, y, u)\right] dx = 0,$$

vagyis:

$$\int_{AA_1} \left[\sqrt{E + 2Fu + Gu^2} + (y' - u)\frac{F + Gu}{\sqrt{E + 2Fu + Gu^2}}\right] dx = 0.$$

Ha AA_1-et elég kicsinynek választjuk, akkor ebből következik, hogy az integrandus minden helyen 0,[1] vagyis:

$$E+2Fu+Gu^2+Fy'+Gy'u-Fu-Gu^2=$$
$$=E+F(u+y')+Gy'u=0.$$

Itt y' jelenti az AA_1 valamely pontjának, mondjuk A-nak irányhatározóját $\left[\frac{dy}{dx}\text{-et}\right]$ u pedig jelenti az illető ponton átmenő [tehát OA] geodetikus vonal irányhatározóját. Ez az egyenlet tehát azt fejezi ki, hogy az AA_1 merőleges az OA-ra, vagyis a Gauss-féle első tételt bizonyítja.

Itt Lagrange-görbe sereg gyanánt az O ponton átmenő geodetikus vonalakat választottuk. Válaszszuk most Lagrange seregül egy e vonalra merőleges geodetikus vonalak seregét és C görbe gyanánt a következőt: Az e vonal AA_1 szakaszát, az AB erre merőleges geodetikus vonalat, az A_1B_1 ugyanilyen hosszú merőleges geodetikus vonalat és a BB_1 tetszésszerinti vonalát a felületnek.

A Hilbert tétel szerint: [minthogy AB és A_1B_1 geodetikus vonalak, tehát ezeken $u=y'$]

$$I=\int_B^A F(x,y,y')\,dx+\int_{AA_1}[F+(y'-u)F'_u]\,dx+$$
$$+\int_{A_1}^{B_1} F(x,y,y')\,dx+\int_{B_1B}[F+(y'-u)F'_u]\,dx=0,$$

de az első és harmadik integrál összege: 0. Kell tehát, hogy:

$$\int_{AA_1}[F+(y'-u)F'_u]\,dx+\int_{B_1B}[F+(y'-u)F'_u]\,dx=0$$

legyen. Az AA_1 vonalszakasz mindenik pontjában a Lagrange görbék merőlegesek az AA_1-re; tehát mindenütt fennáll az

$$E+F(u+y')+Gy'u=0.$$

---

[1] Pontosabban a középértéktétel alkalmazásával kellene következtetnünk.

Ebből következik, hogy az első integrál: 0. Marad tehát megint, hogy

$$\int\limits_{B_1B} [F+(y'-u)F'_u]\, dx = 0$$

és ha B_1B elég kicsiny, megint következik, hogy az integrandusnak kell eltünnie, vagyis a BB_1 vonal minden helyén:

$$E+F(u+y')+Gy'u = 0$$

a mi megint a GAUSS-féle második tételt bizonyítja.

4. Ha geodetikus polarcoordinátákat vezetünk be, akkor a felület vonaleleme:

$$ds^2 = du^2 + m^2dv^2$$

alakra hozható, a hol a $v =$ const. parametervonalak a geodetikus radiusok és [1]

$$\lim_{u=0} m = 0, \quad \lim_{u=0} \frac{\partial m}{\partial u} = 1.$$

Azt kérdezzük, hogy a geodetikus kör lehet-e geodetikus vonal? A felelet igen egyszerű. Kell, hogy $u=$const. geodetikus vonal legyen, vagyis kell, hogy a

$$\int\limits_{v_0}^{v_1} dv \sqrt{\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + m^2}$$

integrálhoz tartozó LAGRANGE-féle differencziálegyenlet megoldása legyen az $u=c$. Ez a LAGRANGE-féle egyenlet a következő:

$$\frac{d}{dv} \frac{\dfrac{du}{dv}}{\sqrt{\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2 + m^2}} - \frac{m\dfrac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2 + m^2}} = 0.$$

Hogy tehát az $u=c$ integrál legyen, kell, hogy

$$\frac{\partial m}{\partial u} = 0$$

[1] L. pl. BIANCHI: Lezioni di geom. differenziale I, p. 195 (1902).

legyen, ha $u=c$ teszszük. Olyan felület, a melynél *minden* O középű geodetikus kör geodetikus vonal lenne, nem lehetséges; mert

$$\frac{\partial m}{\partial u}=0$$

volna identikusan, azaz minden u értékre nézve és ez ellenkezik a

$$\lim_{u=0}\frac{\partial m}{\partial u}=1$$

feltétellel. Tehát csakis arról lehet szó, hogy egyes $u=c$ vonalak legyenek geodetikus vonalak.

Az állandó görbületű felület esetében — a mely bennünket leginkább érdekel —

$$m=r\sin\frac{u}{r},$$

a hol $\frac{1}{r^2}$ a görbület. Ha r valós, akkor állandó positiv görbületű felületünk van. A geodetikus kör geodetikus vonal lesz, ha

$$\frac{\partial m}{\partial u}=\frac{1}{r}\cos\frac{u}{r}=0,$$

vagyis, ha

$$u=r\frac{\pi}{2},$$

Az $u=r\frac{\pi}{2}$ az r sugarú gömb esetében azt mondja, hogy az a geodetikus kör, melynek geodetikus radiusa $\frac{r\pi}{2}$, (tehát a legnagyobb kör negyedrésze) geodetikus vonal. Más tulajdonképpeni geodetikus kör nem is lehet geodetikus vonal. Ha pedig $r=ik$, akkor állandó negativ görbületű felületünk van és ekkor

$$\frac{\partial m}{\partial u}=0=\frac{e^{\frac{u}{k}}+e^{-\frac{u}{k}}}{2},$$

a mely valós u esetében csakis $u=0$ helyen lehet 0, vagyis az állandó negativ görbületű felületen nincsen olyan geodetikus kör, mely egyúttal geodetikus vonal lenne.

5. Ha pedig geodetikus parallelcoordinátákat vezetünk be, akkor a vonalelem:

$$ds^2 = du^2 + m^2 dv^2$$

alakú, a hol

$$\lim_{u=0} m = 1, \quad \lim_{u=0} \frac{\partial m}{\partial u} = 0.$$

Ha azt kérdezzük, hogy az u=const. vonal, vagyis a geodetikus egyenlőközű mikor lesz geodetikus vonal, a Lagrange-féle differencziálegyenlet megint

$$\frac{\partial m}{\partial u} = 0$$

egyenletre vezet, melynek v-től függetlenül kell fennállania. Ha azt kivánjuk, hogy a felületen *minden* egyenlőközű vonal geodetikus vonal legyen, akkor ennek természetesen csakis oly értelme lehet, hogy maga az $u = 0$ is, vagyis a coordinátarendszer u tengelye, az eddig e-nek nevezett vonal is geodetikus vonal legyen. Tehát a kérdés úgy hangzik, hogy mikor lesz minden geodetikus vonallal egyenlőközű vonal geodetikus? Kell, hogy

$$\frac{\partial m}{\partial u} = 0$$

legyen identikusan. De ekkor a felület görbülete

$$K = -\frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} = 0,$$

vagyis a felület görbülete: 0, tehát *csakis a síkra lefejthető felületen lehet minden geodetikus egyenlőközű vonal egyúttal geodetikus vonal.*

Állandó positiv görbületű felület esetében:[1]

$$m = \cos \frac{u}{r},$$

tehát

$$\frac{\partial m}{\partial u} = -\frac{1}{r} \sin \frac{u}{r}$$

[1] Bianchi: I. p. 222.

és így az $u=0$, $r\pi, \ldots$-nek megfelelő vonalak geodetikus vonalak, vagyis a gömbfelületen geodetikus parallela, mely egyuttal geodetikus vonal volna nincsen,

Állandó negativ görbületű felület esetében $r=ki$

$$m = \cos \text{hyp.} \frac{u}{k}$$

és így $\frac{\partial m}{\partial u} = 0$ csakis $u=0$ valós értéke mellett lehet; tehát itt sincsen geodetikus parallela.

Tárgyalásunk főeredménye tehát az, hogy az állandó görbületű felületen egyetlen geodetikus egyenlőközű sem lehet geodetikus vonal, ha a görbület 0-tól különbözik.

Bólyai Farkas, miként emlitettem, azt akarta bebizonyitani, hogy az egyenessel egyenlőközű vonal: egyenes. Bizonyitásánál természetesen a congruentia axiomáit felhasználja, az idomok eltolhatóságát postulálja és ezzel a síkot, melyen operál, állandó görbületi felületnek kellett tekintenie (a mai, illetőleg a Gauss-féle fogalmazásban), vagyis felületelméleti szempontból tekintve a dolgot, azt kellett volna kimutatnia, hogy a geodetikus egyenlőközű geodetikus vonal. Ez pedig úgy az állandó positiv, mint az állandó negativ görbületű felületre nézve lehetetlen. Innen magyarázható, hogy míg az euklidesi postulatum régebbi Saccheri vagy Legendre-féle bizonyitási kisérletei, a melyek lényegben a háromszög szögösszegére vonatkoznak, részben mindig sikerülnek, mert az állandó positiv görbületű felületen a szögösszeg $2R$-nél nagyobb, Bólyai Farkas éles elméjű bizonyitási kisérlete nem sikerülhetett.

Beke Manó.

A DIRICHLET-FÉLE PROBLÉMA EGY ESETÉRŐL.

(Második közlemény.)

12. A G GREEN-féle függvényt ki lehet fejezni elemi függvényekkel.

Térjünk vissza $\frac{\partial G}{\partial y}$-nak (11) alatti alakjához. E differencziálhányados négy sorból van összerakva, a melyek mindegyike ilyen alakú:

$$\Sigma = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2v}{(u+2n\pi)^2+v^2}.$$

Ezt czélszerű a következő alakban írni:

$$\sum = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{n-\frac{iv-u}{2\pi}} - \frac{1}{n-\frac{-iv-u}{2\pi}}\right].$$

Használjuk most fel a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{n-a}-\frac{1}{n-v-a}\right] = \pi\,[\cot\pi\,(v+a)-\cot\pi a]$$

képletet[1] és tegyünk a helyébe $\frac{iv-u}{2\pi}$-t, $v+a$ helyébe $\frac{-iv-u}{2\pi}$-t. Ekkor:

$$\Sigma = \frac{1}{2i}\left[-\cot\frac{u+iv}{2}+\cot\frac{u-iv}{2}\right],$$

azaz

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2v}{(u+2n\pi)^2+v^2} = \frac{i}{2}\left[\cot\frac{u+iv}{2}-\cot\frac{u-iv}{2}\right] \qquad (14)$$

---

[1] L. TANNERY ET MOLK: Eléments de la théorie des Fonctions elliptiques, I. kötet, 141. l.

vagy

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2v}{(u+2n\pi)^2+v^2} = \frac{1-e^{-2v}}{1-2e^{-v}\cos u+e^{-2v}}. \tag{14'}$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{i}{4}&\left[\cot\frac{x-x_0+(y+y_0)i}{2} - \cot\frac{x-x_0-(y+y_0)i}{2}\right. - \\ -\frac{i}{4}&\left[\cot\frac{x-x_0+(y-y_0)i}{2} - \cot\frac{x-x_0-(y-y_0)i}{2}\right] \\ -\frac{i}{4}&\left[\cot\frac{x+x_0+\pi+(y+y_0)i}{2} - \cot\frac{x+x_0+\pi-(y+y_0)i}{2}\right] + \\ +\frac{i}{4}&\left[\cot\frac{x+x_0+\pi+(y-y_0)i}{2} - \cot\frac{x+x_0+\pi-(y-y_0)i}{2}\right];\end{aligned} \tag{15}$$

a jobboldal természetesen csak látszólag képzetes és írhatjuk a $\frac{\partial G}{\partial y}$ differencziálhányadost így is:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2}&\frac{1-e^{-2(y+y_0)}}{1-2e^{-(y+y_0)}\cos(x-x_0)+e^{-2(y+y_0)}} - \\ -\frac{1}{2}&\frac{1-e^{-2(y-y_0)}}{1-2e^{-(y-y_0)}\cos(x-x_0)+e^{-2(y-y_0)}} \\ -\frac{1}{2}&\frac{1-e^{-2(y+y_0)}}{1+2e^{-(y+y_0)}\cos(x+x_0)+e^{-2(y+y_0)}} + \\ +\frac{1}{2}&\frac{1-e^{-2(y-y_0)}}{1+2e^{-(y-y_0)}\cos(x+x_0)+e^{-2(y-y_0)}},\end{aligned} \tag{16}$$

Kiváltképen szükségünk lesz $\frac{\partial G}{\partial y}$-ra az x tengely mentén:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0} = $$

$$= \frac{4e^{-y_0}(1-e^{-2y_0})\cos x\cos x_0}{[1-2e^{-y_0}\cos(x-x_0)+e^{-2y_0}]\,[1+2e^{-y_0}\cos(x+x_0)+e^{-2y_0}]}. \tag{17}$$

Minthogy $\frac{\partial G}{\partial y}$-t ismerjük, egy quadratura megadja G-t:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \int_0^y \frac{\partial G}{\partial y}\,dy.$$

Alkalmazván a (15) alatti egyenlőségben az

$$\int \cot\frac{u+iv}{2}\,dv = \frac{2}{i}\,\mathrm{logsin}\,\frac{u+iv}{2} + \mathrm{const.}$$

képletet, azt találjuk, hogy

$$G = \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin\dfrac{x-x_0+(y+y_0)i}{2}\sin\dfrac{x-x_0-(y+y_0)i}{2}}{\cos\dfrac{x+x_0+(y+y_0)i}{2}\cos\dfrac{x+x_0-(y+y_0)i}{2}} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\log\frac{\sin\dfrac{x-x_0+(y-y_0)i}{2}\sin\dfrac{x-x_0-(y-y_0)i}{2}}{\cos\dfrac{x+x_0+(y-y_0)i}{2}\cos\dfrac{x+x_0-(y-y_0)i}{2}}. \tag{18}$$

Ismét megszabadulhatunk az imaginarius tagoktól, ha e formulákra gondolunk:

$$\sin\frac{u+vi}{2}\sin\frac{u-vi}{2} = \tfrac{1}{4}e^{v}\;(1-2e^{-v}\cos u+e^{-2v})$$

$$\cos\frac{u+vi}{2}\cos\frac{u-vi}{2} = \tfrac{1}{4}e^{v}\;(1+2e^{-v}\cos u+e^{-2v})$$

és igy végre

$$G(x, y\,; x_0, y_0) = \tfrac{1}{2}\log\frac{1-2e^{-(y+y_0)}\cos(x-x_0)+e^{-2(y+y_0)}}{1+2e^{-(y+y_0)}\cos(x+x_0)+e^{-2(y+y_0)}} -$$

$$-\tfrac{1}{2}\log\frac{1-2e^{-(y-y_0)}\cos(x-x_0)+e^{-2(y-y_0)}}{1+2e^{-(y-y_0)}\cos(x+x_0)+e^{-2(y-y_0)}}. \tag{19}$$

Egyébként nem nehéz igazolni, hogy ha a jobboldalon y szerint differencziálunk, a (16) alatti egyenlőség jobboldalát kapjuk.

13. Vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik G a végtelenben. Ha G-t

$$G = \tfrac{1}{2}\log U \tag{20}$$

alakban írjuk, U-ra nézve világos, hogy

$$\left[\frac{(1-e^{-y-y_0})\,(1-e^{-y+y_0})}{(1+e^{-y-y_0})\,(1+e^{-y+y_0})}\right]^2 < |\,U\,| < \left[\frac{(1+e^{-y-y_0})\,(1+e^{-y+y_0})}{(1-e^{-y-y_0})\,(1-e^{-y+y_0})}\right]^2. \tag{21}$$

Tehát bármilyen értéke van is az x-nek $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ között, U egyenletesen közeledik **1**-hez és vele G zérushoz.

Lássuk G differencziálhányadosait:

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{e^{-(y+y_0)}\sin(x-x_0)}{1-2e^{-(y+y_0)}\cos(x-x_0)+e^{-2(y+y_0)}}+$$

$$+\frac{e^{-(y+y_0)}\sin(x+x_0)}{1+2e^{-(y+y_0)}\cos(x+x_0)+e^{-2(y+y_0)}}+\cdots$$

tehát

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|<\frac{2e^{-y-y_0}}{(1-e^{-y-y_0})^2}+\frac{2e^{-y+y_0}}{(1-e^{-y+y_0})^2}$$

és igy, δ-t tetszőlegesen választva, mihelyt $y\geqq y_0+\delta$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|<e^{-y}M, \tag{22}$$

a hol

$$M=\frac{2e^{-y_0}}{(1-e^{-2y_0})^2}+\frac{2e^{+y_0}}{(1-e^{-\delta})^2}. \tag{23}$$

Továbbá (16) alapján

$$\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|<\frac{2e^{-y-y_0}}{(1-e^{-y-y_0})^4}+\frac{2e^{-y+y_0}}{(1-e^{-y+y_0})^4}$$

a honnan, ha $y\geqq y_0+\delta$, felírhatjuk, hogy

$$\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|<e^{-y}M'; \tag{24}$$

itt M' állandó, értéke:

$$M'=\frac{2e^{-y_0}}{(1-e^{-2y_0})^4}+\frac{2e^{y_0}}{(1-e^{-\delta})^4}. \tag{25}$$

E szerint y növekedtével $\frac{\partial G}{\partial x}$ és $\frac{\partial G}{\partial y}$ szintén egyenletesen közelednek zérushoz.

Forduljunk vissza a (13) alatti formulához és toljuk P_1Q_1-et mind magasabbra — vagy a mi egyre megy — növeljük y_1-et a végtelenbe. Az

$$\int\limits_{P_1Q_1} V\frac{\partial G}{\partial y}\,dx$$

integrál határértéke zérus, mert követeljük, hogy a V megoldás véges maradjon a végtelenben is. $\frac{\partial V}{\partial y}$ viselkedéséről nem tudunk semmit. *Tegyük fel a V függvényről, hogy* $G\frac{\partial V}{\partial y}$

egyenletesen közeledik zérushoz, bármi is az x, ha y a végtelenbe nő. E feltevésből folyik, hogy

$$\lim_{y_1=\infty} \int_{P_1Q_1} \left(V \frac{\partial G}{\partial y} - G \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx = 0.$$

Kezdettől fogva feltételeztük, hogy $\varphi(y)$ valamint $\psi(y)$ véges határok felé közelednek, ha y-t a végtelenbe növeljük. Másrészt $\frac{\partial G}{\partial x}$ oly módon válik zérussá, mint e^{-y}, tehát

$$\int_0^{y_1} \varphi(y) \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x=-\frac{\pi}{2}} dy, \quad \int_0^{y_1} \psi(y) \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x=\frac{\pi}{2}} dy$$

integráloknak van határértékük, ha y_1 végtelenné válik. Mindezek után felírhatjuk a következő eredményt:

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x) \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_{y=0} dx +$$

$$+ \int_0^{\infty} \varphi(y) \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x=-\frac{\pi}{2}} dy - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(y) \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x=\frac{\pi}{2}} dy. \quad (26)$$

vagy részletesen

$$V(x_0, y_0) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)\, e^{-y_0}(1-e^{-2y_0}) \cos x \cos x_0 dx}{(1-2e^{-y_0}\cos(x-x_0)+e^{-2y_0})(1+2e^{-y_0}\cos(x+x_0)+e^{-2y_0})}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(y)\, e^{-y}(1-e^{-2y})(e^{y_0}-e^{-y_0}) \cos x_0\, dy}{(1+2e^{-y+y_0}\sin x_0+e^{-2y+2y_0})(1+2e^{-y-y_0}\sin x_0+e^{-2y-2y_0})}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\psi(y)\, e^{-y}(1-e^{-2y})(e^{y_0}-e^{-y_0}) \cos x_0\, dy}{(1-2e^{-y+y_0}\sin x_0+e^{-2y+2y_0})(1-2e^{-y-y_0}\sin x_0+e^{-2y-2y_0})}. \quad (27)$$

14. Egészen biztosak nem vagyunk a felől, hogy a most talált formulával előállítottuk a megoldást, mert a levezetés

folyamán V-ről több olyan feltevést tettünk (11. §. és 13. §.), a melyekhez nem volt semmi jogunk.

Ki fogjuk azonban mutatni, hogy a (27)-es képlettel előállított $V(x_0, y_0)$ függvény csakugyan megoldás, mert eleget tesz a feladat valamennyi követelésének; minthogy pedig csak egy megoldás van, utólag be lesz bizonyítva a talált eredmény helyessége.

Első kérdés az, vajjon $V(x_0, y_0)$ kielégíti-e a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2} = 0$$

egyenletet. Jegyezzük meg, hogy (27) jobboldalán szereplő integrálok mind olyan függvényei x_0, y_0-nak, hogy ha differencziálni akarjuk őket, szabad differencziálni az integráljel alatt. Ugyanis $f(x)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ absolut értékei kisebbek maradnak egy véges L számnál, továbbá $\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=0}$ -nak x_0 vagy y_0 szerint vett első és második differencziálhányadosai x_0 vagy y_0-nak egyenletesen folytonos függvényei, a midőn x a $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban mozog. Ezzel a dolog el van intézve az első integrálra vonatkozólag. Vegyük a másodikat; ennél

$$\left|\varphi(y)\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=-\frac{\pi}{2}}\right| < LMe^{-y}$$

és

$$\left|\psi(y)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial x_0}\right)_{x=-\frac{\pi}{2}}\right| < LM_1e^{-y}$$

továbbá

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial x_0}\right)_{x=-\frac{\pi}{2}}$$

x_0-nak egyenletesen folytonos függvénye, ha y a 0 és l értékek között marad, bármily nagy is l. Szabad tehát a második integrálnál is az integráljelen belül differencziálni x_0 szerint[1] és ugyanigy bizonyíthatjuk be az állítás többi részét is.

[1] L. pl. PICARD: Traité d'Analyse, II. kiadás, I. kötet, 45. l.

Közvetlenül igazolható, hogy

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2}=0$$

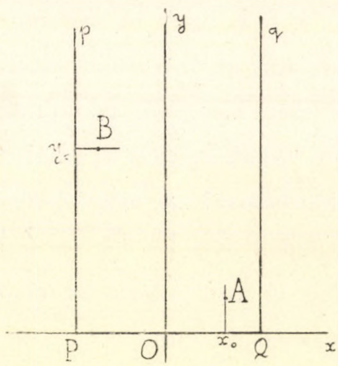
innen x szerint differencziálván, ezt találjuk:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)=0\,;$$

és éppen így

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)=0,$$

tehát V csakugyan eleget tesz a LAPLACE-féle differencziálegyenletnek.



10. ábra.

15. Lássuk már most, teljesülnek-e a határfeltételek. Tegyük először x_0-t állandóvá és közelítsük y_0-t zérushoz. Azt állítom, hogy *ekkor* $V(x_0, y_0)$ *határértéke* $f(x_0)$.

Vizsgáljuk meg külön-külön a V-ben szereplő három integrált. Jelöljük őket I, I_1, I_2-vel, ekkor tehát

$$V=I+I_1+I_2. \tag{28}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\lim_{y_0=0} I_1=0,\quad \lim_{y_0=0} I_2=0,\quad \lim_{y_0=0} I=f(x_0). \tag{29}$$

Valóban

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(y)\,e^{-y}\cos x_0\,.\,\lambda\,dy, \tag{30}$$

a hol

$$|\lambda|<\frac{e^{y_0}(1-e^{-2y_0})}{\cos^4 x_0},$$

mert

$$1+2a\sin x_0+a^2$$

kifejezés minimuma, ha csak a-t változtatjuk: $\cos^2 x_0$. Ennélfogva

$$|I_1| < \frac{L}{\pi}\cos x_0 \int_0^\infty \frac{e^{y_0}(1-e^{-2y_0})}{\cos^4 x_0} e^{-y} dy = \frac{L}{\pi}\frac{e^{y_0}}{\cos^3 x_0}(1-e^{-2y_0})$$

és hasonló okból:

$$|I_2| < \frac{L}{\pi}\frac{e^{y_0}}{\cos^3 x_0}(1-e^{-2y_0}), \tag{31}$$

tehát I_1 és I_2 valóban zérus felé közelednek y_0-sal együtt.

Az I integrálnak minden eleme szintén zérus felé tart, kivéve egyet, a mely $x=x_0$ értékhez tartozik. Tájékozásul számítsuk ki I-t arra az esetre, a mikor

$$f(x) = 1.$$

Nevezzük I idetartozó értékét I'-nek és legyen rövidség kedvéért: $a = e^{-y_0}$.

$$I' = \frac{1-a^2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-2a\cos(x-x_0)+a^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{1+2a\cos(x+x_0)+a^2}\right]dx. \tag{32}$$

A határozatlan integrál elemi függvényekből is összerakható és így

$$I' = \frac{1-a^2}{2\pi}\frac{2}{1-a^2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a}\operatorname{tg}\frac{x-x_0}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{arctg}\left(\frac{1-a}{1+a}\operatorname{tg}\frac{x+x_0}{2}\right)\right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=+\frac{\pi}{2}}.$$

Tekintettel arra, hogy

$$|x_0| < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{-\frac{\pi}{2} \pm x_0}{2} < 0, \quad 0 < \frac{+\frac{\pi}{2} \pm x_0}{2} < \frac{\pi}{2}$$

bizonyára

$$\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2} \pm x_0}{2} > 0, \quad \operatorname{tg}\frac{-\frac{\pi}{2} \pm x_0}{2} < 0;$$

tehát e kifejezés

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}-x_0}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\operatorname{tg}\frac{-\frac{\pi}{2}-x_0}{2}\right)$$

határértéke π, ha α 1-nél kisebb számokon át közeledik 1-hez, míg

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}+x_0}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\operatorname{tg}\frac{-\frac{\pi}{2}+x_0}{2}\right)$$

határértéke zérus, tehát

$$\lim_{\alpha=1} I'=1. \tag{33}$$

Térjünk vissza az általános esethez és írjuk az $f(x)$ helyébe $f(x_0)+[f(x)-f(x_0)]$ összeget. Ennek megfelelőleg az I integrál két részből fog állni. Az első rész határértéke $f(x_0)$, a másodiké zérus. Hogy ezt megmutassuk, oszszuk az utóbbit is három részre; akkor lesz

$$I=f(x_0)\frac{1-\alpha^2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1-2\alpha\cos(x-x_0)+\alpha^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1+2\alpha\cos(x+x_0)+\alpha^2}\right]dx$$
$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_0-\delta}\Phi dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Phi dx+\int_{x_0+\delta}^{\frac{\pi}{2}}\Phi dx, \tag{34}$$

a hol a következő jelöléssel éltünk:

$$\Phi=\frac{2}{\pi}\,\frac{[f(x)-f(x_0)]\,\alpha(1-\alpha^2)\cos x\cos x_0}{[1-2\alpha\cos(x-x_0)+\alpha^2]\,[1+2\alpha\cos(x+x_0)+\alpha^2]}.$$

Legyen η_1 olyan kis szám, hogy

$$|I'-1|<\varepsilon$$

($\varepsilon<1$), ha $y_0<\eta_1$. Az első integrálnak és $f(x_0)$-nak különbsége ekkor legfeljebb $|f(x_0)|\,\varepsilon$.

Feltettük $f(x)$-ről, hogy folytonos. Ennek alapján választhatjuk δ-t oly kicsinynek, hogy az $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ intervallumon belül

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

A δ-n többé nem változtatunk. A $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x_0-\delta}\Phi dx$ és $\int\limits_{x_0+\delta}^{\frac{\pi}{2}}\Phi dx$ integrálok y_0-sal együtt zérushoz közelednek, mert $\left(-\frac{\pi}{2},\ x_0-\delta\right)$ és $\left(x_0+\delta,\ \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumokon belül

$$|\Phi|<\frac{4L}{\pi}\,\frac{a(1-a^2)}{\sin^4\delta}. \tag{35}$$

Ha tehát η_2 elég kicsiny és $y_0<\eta_2$,

$$\left|\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x_0-\delta}\Phi dx+\int\limits_{x_0+\delta}^{\frac{\pi}{2}}\Phi dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Végre

$$\left|\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Phi dx\right|<\frac{2\varepsilon}{3\pi}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{(1-a^2)\cos x_0\cos x dx}{[1-2a\cos(x-x_0)+a^2][1+2a\cos(x+x_0)+a^2]}$$

a jobboldali integrál minden eleme pozitiv lévén akkor is, ha x $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közt van, annál inkább

$$\left|\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\Phi dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}=\frac{\varepsilon}{3}I'. \tag{36}$$

Jelöljük η-val η_1 és η_2 közül a kisebbiket. Ekkor ez az egyenlőtlenség

$$y_0<\eta$$

maga után vonja a következőt is:

$$|I-f(x_0)|<\varepsilon|f(x_0)|+\frac{\varepsilon}{3}+(1+\varepsilon)\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon(1+L), \tag{37}$$

ha csak δ-t és azután η-t elég kicsinynek választjuk, bármilyen kis szám is ε. Ennek egyenes folyománya, hogy

$$\lim_{y_0=0} I = f(x_0).$$

16. Közeledjünk Pp valamely pontjához egy, az x tengelylyel párhuzamos egyenesen. Azaz tegyük y_0-t állandóvá és közelítsük x_0-t $-\frac{\pi}{2}$ felé. Látni fogjuk, hogy $\varphi(y)$ folytonosságából következik, hogy $V(x_0, y_0)$ *határértéke* $\varphi(y_0)$.

Írjuk V-t megint

$$V(x_0, y_0) = I + I_1 + I_2$$

alakban. Most $(a = e^{-y_0})$

$$|I| < \frac{2}{\pi} L \frac{a(1-a^2)\cos x_0}{(1-a)^4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{4La(1+a)}{\pi(1-a)^3} \cos x_0, \quad (38)$$

tehát

$$\lim_{x_0=-\frac{\pi}{2}} I = 0.$$

Továbbá, ha $x_0 < 0$,

$$1 - 2e^{y \pm y_0} \sin x_0 + e^{-2y \pm 2y_0} > 1$$

és így

$$|I_2| < \frac{L}{\pi} \cos x_0 \int_0^\infty e^{-y}(e^{y_0} + e^{-y_0}) dy = \frac{L}{\pi}(e^{y_0} + e^{-y_0}) \cos x_0, \quad (39)$$

tehát

$$\lim_{x_0=-\frac{\pi}{2}} I_2 = 0. \quad (40)$$

I_1 két részből áll:

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(y) e^{-y} \cos x_0 \frac{e^{y_0}}{1 + 2e^{-y+y_0} \sin x_0 + e^{-2y+2y_0}} dy$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(y) e^{-y} \cos x_0 \frac{e^{-y_0}}{1 + 2e^{-y-y_0} \sin x_0 + e^{-2y-2y_0}} dy.$$

A második rész absolut értéke kisebb, mint

$$\frac{L}{\pi} \frac{a \cos x_0}{(1-a)^2} \int_0^\infty e^{-y} dy = \frac{L}{\pi} \frac{a \cos x_0}{(1-a)^2},$$

mert $1+2e^{-y-y_0}\sin x_0+e^{-2y-2y_0}>(1-e^{-y-y_0})^2 \geqq (1-\alpha)^2$.

Ennélfogva a második rész zérus felé tart $\cos x_0$-sal együtt. Lássuk végre az első részt, melyet J-vel fogunk jelölni:

$$J=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(y)\cos x_0 \frac{e^{y_0-y}dy}{1+2e^{y_0-y}\sin x_0+e^{2(y_0-y)}}.$$

Ha az x_0 változó $-\frac{\pi}{2}$ -hez tart, az integrál minden eleme zérushoz közeledik, egyet kivéve, a mely $y=y_0$ értékhez tartozik. Ez arra indit bennünket, hogy az integráczió tartományát $(0, y_0-\delta)$, $(y_0-\delta, y_0+\delta)$ és $(y_0+\delta, \infty)$ részekre oszszuk. Előbb azonban számítsuk ki J értékét abban az esetben, a mikor $\varphi(y)=1$. Legyen ez J'.

$$J'=\frac{\cos x_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{y_0-y}dy}{1+2e^{y_0-y}\sin x_0+e^{2(y_0-y)}}$$

$$=\frac{\cos x_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{y-y_0}dy}{1+2e^{y-y_0}\sin x_0+e^{2(y-y_0)}}$$

$$J'=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{e^{y-y_0}+\sin x_0}{\cos x_0}\right]_{y=0}^{y=\infty}$$

és végre

$$J'=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{e^{-y_0}+\sin x_0}{\cos x_0}\right).$$

Minthogy $e^{-y_0}<1$ és $\sin x_0$ határértéke -1, míg $\cos x_0$ pozitiv értékeken át halad zérus felé, $\frac{e^{-y_0}+\sin x_0}{\cos x_0}$ határértéke: $-\infty$ és így

$$\lim_{x_0=-\frac{\pi}{2}} J'=1. \tag{41}$$

Ezek után

$$J=\varphi(y_0)J'+\int_0^{y_0-\delta}\Psi dy+\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\Psi dy+\int_{y_0+\delta}^{\infty}\Psi dy,$$

a hol

$$\Psi=\frac{1}{\pi}[\varphi(y)-\varphi(y_0)]\frac{e^{y_0}}{1+2e^{y_0-y}\sin x_0+e^{2y_0-2y}}e^{-y}\cos x_0.$$

Világos, hogy

$$\left| \int_0^{y_0-\delta} \Psi dy + \int_{y_0+\delta}^{y_0+\delta} \Psi dy \right| < \cos x_0 \frac{2L}{\pi} \frac{e^{y_0}}{(1-e^{-\delta})^2} \left[\int_0^{y_0-\delta} e^{-y} dy + \int_{y_0+\delta}^{\infty} e^{-y} dy \right]$$

$$< \cos x_0 \frac{2Le^{y_0}}{\pi(1-e^{-\delta})^2}.$$

A $\varphi(y)$ függvény folytonos lévén, mindenesetre

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)| < \varepsilon,$$

ha

$$|y-y_0| < h,$$

tehát δ-t h-nál kisebbre választva, lesz:

$$\left| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \Psi dy \right| < \varepsilon J'.$$

ε-t tetszőlegesen adjuk meg; azután állapitjuk meg δ-t és végre x_0-t elég közel veszszük fel $-\frac{\pi}{2}$-hez, hogy

$$|J-\varphi(y_0)| < |\varphi(y_0)| \cdot |J'-1| + \varepsilon J' + \frac{2Le^{y_0}}{\pi(1-e^{-\delta})^2} \cos x_0 < 4\varepsilon$$

legyen.

Látjuk tehát, hogy

$$\lim_{x_0=-\frac{\pi}{2}} J = \varphi(y_0).$$

Ugyanígy be lehet bizonyitani, hogy *ha az x változó a $\frac{\pi}{2}$ értékhez közeledik és y_0-t nem változtatjuk, $V(x_0, y_0)$ határértéke $\varphi(y_0)$.* Talán nem fölösleges megjegyeznünk, hogy a bizonyitás folyamán lényeges szerepet játszik az $f(x)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ függvények folytonossága.

17. Hátra van az utolsó kérdés.

Vajjon $V(x_0, y_0)$ megmarad-e két véges szám között, ha y_0 a végtelenbe növekszik?

E kérdésre a következő tétel ad igenlő feleletet:

Ha x_0-t állandóvá téve, y_0-t a végtelenbe növeljük, akkor $V(x_0, y_0)$ az

$$U = \frac{A+B}{2} - \frac{x_0}{\pi}(A-B)$$

értékhez közeledik, a hol A és B, a $\varphi(y)$ és $\psi(y)$ függvények határértékei, a midőn $y=\infty$. Más szóval: *A végtelenben, V függvény arányosan változik a Pp vagy Qq egyenestől számított távolsággal.* Ez physikailag nagyon valószínű, ha arra gondolunk, hogy a V hőmérsékletet jelent.

A következő jelöléseket behozva:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2f(x)\, e^{-y_0}(1-e^{-2y_0}) \cos x \cos x_0\, dx}{\pi[1-2e^{-y_0}\cos(x-x_0)+e^{-2y_0}][1+2e^{-y_0}\cos(x+x_0)+e^{-2y_0}]},$$

$$I_1' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(y)\, e^{-y} \cos x_0 \frac{e^{y_0} dy}{1+2e^{-y+y_0}\sin x_0 + e^{-2y+2y_0}},$$

$$I_1'' = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(y)\, e^{-y} \cos x_0 \frac{e^{-y_0} dy}{1+2e^{-y-y_0}\sin x_0 + e^{-2y-2y_0}},$$

$$I_2' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(y)\, e^{-y} \cos x_0 \frac{e^{y_0} dy}{1-2e^{-y+y_0}\sin x_0 + e^{-2y+2y_0}},$$

$$I_2'' = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(y)\, e^{-y} \cos x_0 \frac{e^{-y_0} dy}{1-2e^{-y+y_0}\sin x_0 + e^{-2y-2y_0}},$$

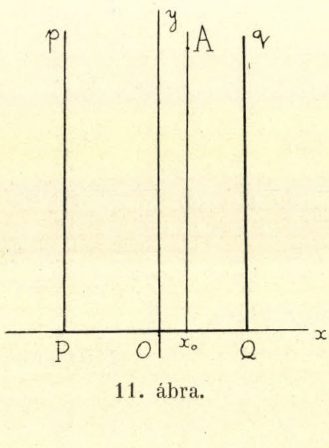
irjunk megint V-t ilyen alakban:

$$V(x_0, y_0) = I + (I_1'+I_1'') + (I_2'+I_2'').$$

Be fogjuk bizonyitani, hogy

$$\lim_{y_0=\infty} I_1' = 0, \quad \lim I_1'' = 0, \quad \lim I_2'' = 0, \tag{42}$$

$$\lim I_1' = A\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{\pi}\right), \quad \lim I_2' = B\left(\frac{1}{2} + \frac{x_0}{\pi}\right). \tag{43}$$



11. ábra.

Az első három állítás könnyen igazolható. Valóban, mihelyt y_0 meghalad egy positiv δ számot,

$$|I| < \frac{2}{\pi} e^{-y_0}(1-e^{-2y_0}) \cos x_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} L \frac{dx}{(1-e^{-2y_0})^4} =$$

$$= \frac{2L\cos x_0}{(1-e^{-2y_0})^2} e^{y_0}.$$

$$|I_1''| \text{ és } |I_2''| < \frac{\cos x_0}{\pi} e^{-y_0} L \int_0^\infty \frac{e^{-y}dy}{(1-e^{-y-\delta})^2}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség jobboldalán felírt integrál tudvalevőleg véges; tehát I, I_1'', I_2'' egyenletesen közelednek zérushoz úgy, mint e^{-y_0}, bármelyik pont is az x a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum belsejében.

Az I_1' integrál tanulmányozására oszszuk fel a $(0, \infty)$ intervallumot két szakaszra, $(0, \omega)$ és (ω, ∞)-re, azzal a feltétellel, hogy a másodikban

$$|\varphi(y)-A| < \varepsilon$$

legyen; ω-n ezek után nem változtatunk. Az integrálnak $(0, \omega)$ intervallumra vonatkozó része, a melyet röviden $I_1'(0, \omega)$-val jelölünk, absolut értékben kisebb, mint

$$\frac{\cos x_0}{\pi} L \int_0^\omega \frac{e^{y_0}}{1+2e^{-y+y_0}\sin x_0 + e^{-2y+2y_0}} e^{-y}dy.$$

Feltehetjük, hogy

$$y_0 \geq \omega_1 > \omega,$$

tehát

$$\frac{e^{y_0}}{1+2e^{-y+y_0}\sin x_0+e^{-2y_0+2y_0}} = \frac{e^{-y_0}}{e^{-2y_0}+2e^{-y-y_0}\sin x_0+e^{-2y}} <$$

$$< \frac{e^{-y_0}}{(e^{-y}-e^{-y_0})^2} < \frac{e^{-y_0}}{(e^{-\omega}-e^{-\omega_1})^2}.$$

Ennélfogva

$$I_1'(0, \omega) < e^{-y_0} \frac{L\cos x_0}{\pi(e^{-\omega}-e^{-\omega_1})^2}.$$

Az I_1' integrál második része:

$$I_1'(\omega, \infty) = \frac{\cos x_0}{\pi} \int_\omega^\infty \varphi(y) e^{-y} \frac{e^{y_0}}{1+2e^{-y+y_0}\sin x_0 + e^{-2y+2y_0}}\, dy$$

$$= A\frac{\cos x_0}{\pi} \int_\omega^\infty \frac{e^{y-y_0}}{1+2e^{y-y_0}\sin x + e^{2(y-y_0)}}\, dy$$

$$+ \frac{\cos x_0}{\pi} \int_\omega^\infty [\varphi(y) - A] \frac{e^{y-y_0}}{1+2e^{y-y_0}\sin x_0 + e^{2(y-y_0)}}\, dy.$$

Ha a

$$\cos x_0 \int_K^\infty \frac{d\beta}{1+2\beta\sin x_0+\beta^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{K+\sin x_0}{\cos x_0}$$

elemi formulára támaszkodunk, világosan látjuk, hogy

$$\left| I_1'(\omega, \infty) - A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{e^{\omega-y_0}+\sin x_0}{\cos x_0}\right)\right| <$$

$$< \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{e^{\omega-y_0}+\sin x_0}{\cos x_0}\right).$$

Midőn y_0 a végtelenbe tart, $\operatorname{arctg}\frac{e^{\omega-y_0}+\sin x_0}{\cos x_0}$ függvény az

$$\operatorname{arctg}\frac{\sin x_0}{\cos x_0} = x_0$$

értékhez közeledik és így ha ω_2 elég nagy (de mindenesetre $\omega_2 > \omega_1$) és

$$y_0 > \omega_2,$$

akkor ε_1-nél kevesebbel különbözik tőle.

Az $y_0 > \omega_2$ egyenlőtlenség maga után vonja tehát, hogy

$$\left| I_1' - A\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{\pi}\right)\right| < \frac{L\cos x_0}{\pi(e^{-\omega} - e^{-\omega_1})^2} e^{-y_0} +$$

$$+ \varepsilon\left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{\pi}\right) + \varepsilon_1\left(\varepsilon + \frac{A}{\pi}\right).$$

E szerint, ha y_0-t végtelen nagygyá teszszük, I_1' — akár közeledik valamely határhoz, akár nem — mindenesetre

$$A\left(\frac{1}{2}-\frac{x_0}{\pi}\right)-\varepsilon_2 \quad \text{és} \quad A\left(\frac{1}{2}-\frac{x_0}{\pi}\right)+\varepsilon_2$$

között ingadozik, a hol

$$\varepsilon_2=\varepsilon\left(\frac{1}{2}-\frac{x_0}{\pi}\right)+\varepsilon_1\left(\varepsilon+\frac{A}{\pi}\right).$$

Ámde ε, ε_1 és így velük ε_2 tetszés szerint kicsiny számok. Kell tehát, hogy I_1' az

$$A\left(\frac{1}{2}-\frac{x_0}{\pi}\right)$$

határérték felé tartson.

I_2' csak annyiban tér el I_1'-től, hogy $\varphi(y)$ helyébe $\psi(y)$ és x_0 helyébe $-x_0$ lép. E szerint I_2'-re nézve

$$\lim_{y_0=\infty} I_2'=B\left(\frac{1}{2}+\frac{x_0}{\pi}\right).$$

Szűcs Adolf.

A PRIMITIV GYÖKÖK ELMÉLETÉHEZ.

Meg fogjuk szerkeszteni azt a kongruencziát, mely a p törzsszám összes primitiv gyökeit adja és csakis ezeket.

Kimutatjuk, hogy e kongruencziának épen annyi a gyöke, a hányadfokú. Legyen

$$p-1=r=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_\varrho^{\alpha_\varrho}.$$

A primitiv gyökök az $x^{p-1}-1\equiv 0$ kongruenczia mindama gyökei, a melyek a következő kongruencziák egyikének sem tesznek eleget.

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & x^{\frac{r}{2}}\equiv 1 \\
2) & x^{\frac{r}{p_1}}\equiv 1 \\
3) & x^{\frac{r}{p_2}}\equiv 1 \\
4) & x^{\frac{r}{p_3}}\equiv 1 \\
5) & x^{\frac{r}{p_4}}\equiv 1 \\
 & \vdots \\
(\varrho+1)) & x^{\frac{r}{p_\varrho}}\equiv 1
\end{array}\right\}\ (\text{mod. } p.)$$

Minthogy

$$x^r-1=(x^{\frac{r}{2}}+1)(x^{\frac{r}{2}}-1),$$

már

$$x^{\frac{r}{2}}+1\equiv 0\ (\text{mod.}\, p) \qquad \text{I)}$$

az a kongruenczia, melyben az 1) alatti kongruenczia egy gyöke sincs meg. A körosztási $2^{\alpha_0}+1=p$ alakú primszámokra már ez a kongruenczia adja a p primszám összes primitiv gyökeit, a melyek száma e szerint $\frac{r}{2}$. Távolítsuk most el az I) alatti kongruencziából a 2) alatti kongruenczia minden gyökét.

$$(x^{\frac{r}{p_1}}-1)=(x^{\frac{r}{2p_1}}+1)(x^{\frac{r}{2p_1}}-1).$$

Ámde az $x^{\frac{r}{2p_1}}-1$ kongruenczia minden gyöke megvan az 1) alatti kongruencziában, ezeket már eltávolítottuk az $x^r-1\equiv 0$ kongruencziából. Ezek már nincsenek meg az I) alatti kongruencziában. Tehát az I)-ből már csak az $x^{\frac{r}{2p_1}}+1\equiv 0$ kongruenczia összes gyökeit kell eltávolítani. E szerint:

$$f_1(x)=\frac{x^{\frac{r}{2}}+1}{x^{\frac{r}{2p_1}}+1} \qquad \text{II)}$$

és $f_1(x)\equiv 0$ (mod. p) az a kongruenczia, a melyben már sem az 1), sem a 2) kongruenczia gyökei nincsenek meg. Fokszáma

$$\frac{r}{2}-\frac{r}{2p_1}=\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right).$$

Világos, hogy annyi gyöke van, a hányadfokú.

Vegyük most a 3) alatti kongruencziát. Ebből távolítsuk el az 1) és 2) alatti kongruencziák benne foglalt gyökeit. Az eltávolítás után a megmaradt gyököket a II) alatti kifejezés adja, ha abban r helyébe $\frac{r}{p_2}$ értékét teszszük:

$$\frac{x^{\frac{r}{2p_2}}+1}{x^{\frac{r}{2p_1p_2}}+1}.$$

Ezeket a gyököket most mind eltávolitjuk a II) alattiból, lesz:

$$f_2(x)=\frac{(x^{\frac{r}{2}}+1)}{(x^{\frac{r}{2p_1}}+1)\dfrac{(x^{\frac{r}{2p_2}}+1)}{(x^{\frac{r}{2p_1p_2}}+1)}} \qquad \text{III)}$$

és $f_2(x) \equiv 0$ az a kongruenczia, a melyben már sem az 1), sem a 2), sem a 3) alatti kongruenczia gyökei nincsenek meg. Fokszáma

$$\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)-\frac{r}{2p_2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)=\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right).$$

Világos, hogy annyi gyöke van a hányadfokú.

Vegyük a 4) alatti kongruencziát. Ebből mindenekelőtt távolítsuk el az 1), 2) és 3) alatti kongruencziák gyökeit. Az eltávolítás után megmaradt gyököket a III) alatti kifejezés adja, ha abban r helyébe $\frac{r}{p_3}$ értékét teszszük.

$$\frac{\left(x^{\frac{r}{2p_3}}+1\right)}{\left(x^{\frac{r}{2p_1p_3}}+1\right)\dfrac{\left(x^{\frac{r}{2p_2p_3}}+1\right)}{\left(x^{\frac{r}{2p_1p_2p_3}}+1\right)}}.$$

Ezeket a gyököket most mind eltávolítjuk a III) alattiból:

$$f_3(x)=\frac{\left(x^{\frac{r}{2}}+1\right)}{\left(x^{\frac{r}{2p_1}}+1\right)\cdot\dfrac{\left(x^{\frac{r}{2p_2}}+1\right)}{\left(x^{\frac{r}{2p_1p_2}}+1\right)}\cdot\dfrac{\left(x^{\frac{r}{2p_3}}+1\right)}{\left(x^{\frac{r}{2p_1p_3}}+1\right)\dfrac{\left(x^{\frac{r}{2p_2p_3}}+1\right)}{\left(x^{\frac{r}{2p_1p_2p_3}}+1\right)}}}$$

$f_3(x) \equiv 0$ az $x^r-1 \equiv 0$ kongruencziából úgy keletkezett, hogy eltávolították ebből az 1), 2), 3), 4) alatti kongruencziák gyökeit. Fokszáma $f_3(x)$-nek

$$\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)-\frac{r}{2p_3}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)=$$
$$=\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right).$$

Épen így kapjuk $f_4(x)$ értékét. Ennek fokszáma:

$$=\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\left(1-\frac{1}{p_4}\right).$$

$f_4(x)$ értékét így is írhatjuk:

$$f_4(x)=\frac{(x^{\frac{r}{2}}+1)\Pi(x^{\frac{r}{2p_1p_2}}+1)\,.\,(x^{\frac{r}{2p_1p_2p_3p_4}}+1)}{\Pi(x^{\frac{r}{2p_1}}+1)\Pi(x^{\frac{r}{2p_1p_2p_3}}+1)}. \qquad V)$$

$f_4(x)\equiv 0$ kongruencziának gyökei, már csak azon gyökei az $x^r-1\equiv 0$ kongruencziának, a melyek az 1), 2), 3), 4) és 5) alatti kongruencziák gyökeinek eltávolítása után megmaradtak. Általában véve a teljes indukczio után:

$$f_\varrho(x)=\frac{(x^{\frac{r}{2}}+1)\Pi(x^{\frac{r}{2p_1p_2}}+1)\Pi(x^{\frac{r}{2p_1p_2p_3p_4}}+1)\ldots}{\Pi(x^{\frac{r}{2p_1}}+1)\Pi(x^{\frac{r}{2p_1p_2p_3}}+1)\Pi(x^{\frac{r}{2p_1p_2p_3p_4p_5}}+1)\ldots}. \qquad U)$$

Ennek fokszáma

$$\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\varrho}\right).$$

Gyökeinek száma épen annyi. Világos, hogy $f_\varrho(x)\equiv 0$ kongruenczia absolut tagja $\equiv 1$ mod. p.

Az $f_\varrho(x)$ értékét így fogjuk jelölni: $f_p(x)$. Az $f_p(x)\equiv 0$ mod. p kongruencziának fokszáma épen

$$\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\varrho}\right)=\varphi(r)=\varphi(p-1).$$

Épen annyi gyöke van, a hányadfokú. Gyökei a p törzsszám összes primitiv gyökei. Hogy ezek száma épen $\varphi(p-1)$, ezt más számelméleti eredményekből is tudjuk. Itt az a fontos, hogy egyszerű algebrai operácziókkal megszerkesztettük a $f_p(x)\equiv 0$ mod. p kongruencziát. Ezt a kongruencziát a p törzsszámhoz tartozó «*primitiv kongruencziának*» nevezhetjük. Az $f_p(x)\equiv 0$ kongruenczia szerkezetéből világos, hogy ennek absolut tagja $\equiv$ 1 mod. p, azaz:

«*Bármely primszám (2 és 3 kivételével) primitiv gyökeinek szorzata* $\equiv$ 1.»

Ezt a tételt, mely magában véve is érdekes, már GAUSS ki-mondja és bebizonyítja a D. A. I. kötetében. Legyen g a p törzsszám primitiv gyöke. Tudjuk, hogy az összes primitiv gyökök sorozata ez:

$$g^1, g^{a_1}, g^{a_2}, \ldots, g^{p-2},$$

a hol

$$1, a_1, a_2, \ldots, p-2 \qquad A)$$

számok a $p-1$-gyel relativ törzsszámok teljes sorozata. Ha a_i benne van a sorozatban, akkor $(p-1)-a_i$ is benne van. Ámde $a_i+\big((p-1)-a_i\big)=p-1$. E szerint az $A)$ sorozat összes számainak összege:

$$s=\frac{\varphi(p-1)}{2}(p-1).$$

Tehát a p primszám összes primitiv gyökeinek szorzata:

$$P\equiv g^{\frac{\varphi(p-1)}{2}\cdot(p-1)}\equiv(g^{(p-1)})^{\frac{\varphi(p-1)}{2}}\equiv 1,$$

mert

$$g^{p-1}\equiv 1. \qquad Q.\ e.\ d.$$

De adhatjuk ennek a tételnek még egy egyszerűbb bizonyítását is. Ugyanis, ha g primitiv gyök, a recziprok értéke: g' szintén primitiv gyök, mert a

$$gg'\equiv 1\ (\text{mod. } p)$$

kongruenczia bizonyítja, hogy g és g' ugyanazon kitevőhöz tartoznak. Ámde g' sohasem lehet $\equiv g$, mert akkor $g^2\equiv 1$ mod. p lenne, a mi képtelenség, miután g primitiv gyök. Így tehát a primitiv gyököket kettesével úgy egyesítjük, hogy kettőnek-kettőnek szorzata $\equiv 1$, ámde $p=2$, $p=3$ esetek kizárásával, a primitiv gyökök száma mindig páros, tehát valamennyinek a szorzata valóban $\equiv 1$.

Az itt tárgyalt $f_p(x)\equiv 0$ primitiv kongruenczia alapján a primitiv gyökökre még más fontos tételek is megállapíthatók. A fontos épen az, hogy az úgynevezett «*primitiv kongruenczia*» minden primszámra nézve a *legegyszerűbb algebrai* operácziókkal megszerkeszthető. Minden törzsszámra nézve ez a «primitiv kongruenczia» annyira jellemző, hogy nem lesz felesleges minden primszámra megszerkeszteni és táblába állítani. Ennek a táblának a megszerkesztése a legegyszerűbb műveletekkel jár, a legtöbb esetben azonnal felírható a p törzsszámhoz tartozó primitiv kongruenczia.

Álljon itt a táblázat a 100-as számkörben:

Primszám	Primitiv kongruenczia
5	$x^2+1\equiv 0,$
7	$x^2-x+1\equiv 0,$
11	$x^4-x^3+x^2-x+1\equiv 0,$
13	$x^4-x^2+1\equiv 0,$
17	$x^8+1\equiv 0,$
19	$x^6-x^3+1\equiv 0,$
23	$x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x+1\equiv 0,$
29	$x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1\equiv 0,$
31	$x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1\equiv 0,$
37	$x^{12}-x^6+1\equiv 0,$
41	$x^{16}-x^{12}+x^8-x^4+1\equiv 0,$
43	$x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1\equiv 0,$
47	$x^{22}-x^{21}+x^{20}-x^{19}+\cdots+x^4-x^3+x^2-x+1\equiv 0,$
53	$x^{24}-x^{22}+x^{20}-x^{18}+x^{16}-x^{14}+x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+$ $+x^4-x^2+1\equiv 0,$
59	$x^{28}-x^{27}+x^{26}\times x^{25}+\cdots+x^2-x+1\equiv 0,$
61	$x^{16}+x^{14}-x^{10}-x^8-x^6+x^2+1\equiv 0,$
67	$x^{20}+x^{19}-x^{17}-x^{16}+x^{14}+x^{13}-x^{11}-x^{10}-x^9+x^7+$ $+x^6-x^4-x^3+x+1\equiv 0,$
71	$x^{24}+x^{23}-x^{19}-x^{18}-x^{17}-x^{16}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+$ $+x^{10}-x^8-x^7-x^6-x^5+x+1\equiv 0,$
73	$x^{24}-x^{12}+1\equiv 0,$
79	$x^{24}+x^{23}-x^{21}-x^{20}+x^{18}+x^{17}-x^{15}-x^{14}+x^{12}-x^{10}-$ $-x^9+x^7+x^6-x^4-x^3+x+1\equiv 0,$
83	$x^{40}-x^{39}+x^{38}-x^{37}+\cdots+x^4-x^3+x^2-x+1\equiv 0,$
89	$x^{40}-x^{36}+x^{32}-x^{28}+\cdots+x^{16}-x^{12}+x^8-x^4+1\equiv 0,$
97	$x^{32}-x^{16}+1\equiv 0.$

Legyen szabad néhány példát adni.

1. Körosztási primszámokra nézve:

$$p=2^n+1,$$
$$\frac{p-1}{2}=2^{n-1}.$$

Tehát a megfelelő primitiv kongruenczia:

$$x^{2^{n-1}}+1\equiv 0.$$

Így $p=257$ esetében $p-1=256$, a primitiv kongruenczia:

$$x^{128}+1\equiv 0 \ (\text{mod. } 257.)$$

2. $p=2^a3^b+1$ alakú primszámokra a primitiv kongruenczia:

$$(y^2-y+1)_{y=x^{2^{a-1}.3^{b-1}}}\equiv 0.$$

Ilyen primszámok:

$$\begin{aligned}109&=2^2.3^3+1,\\193&=2^6.3+1,\\163&=2.3^4+1,\\433&=2^4.3^3+1,\\487&=2.3^5+1,\\577&=2^6.9+1,\\769&=2^8.3+1.\end{aligned}$$

3. $p=2^a.5^b+1$ alakú primszámokra a primitiv kongruenczia:

$$(y^4-y^3+y^2-y+1)_{y=x^{2^{a-1}.5^{b-1}}}\equiv 0.$$

Ilyen primszámok:

$$\begin{aligned}p=101&=2^2.5^2+1,\\251&=2.5^3+1,\\401&=2^4.5^2+1,\\641&=2^7.5+1.\end{aligned}$$

4. $p=2^a.7^b+1$ alakú primszámokra a primitiv kongruenczia:

$$(y^6-y^5+y^4-y^3+y^2-y+1)_{y=x^{2^{a-1}.7^{b-1}}}\equiv 0.$$

Ilyen primszámok:

$$p = 113 = 2^4 . 7+1,$$
$$197 = 2^2 . 7^2+1,$$
$$449 = 2^6 . 7+1.$$

5. $p=2^a . 11^b+1$ primszámok primitiv kongruencziája:

$$(y^{10}-y^9+y^8-y^7+y^6-y^5+y^4-y^3+y^2-y+1)_{y=x^{2^{a-1}} . 11^{b-1}} \equiv 0.$$

Ilyen primszám:

$$p = 353 = 2^5 . 11+1.$$

6. Általában véve $p = 2^a q^b+1$ primszámok primitiv kongruencziája (q páratlan primszám):

$$(y^{q-1}-y^{q-2}+\cdots+y^2-y+1)_{y=x^{2^{a-1}} . q^{b-1}} \equiv 0.$$

Demeczky Mihály.

A TRANZITIV CSOPORTOK ELMÉLETÉHEZ.

Ha G k-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport, akkor tartalmaz oly szubsztituacziót, mely legalább $k-1$ elemet nem változtat következőleg:

a) Minden k-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport tartalmaz oly szubsztitucziót, mely $n-k+1$ elemnél többet nem transzformál.

Ha

$$g=(x_1\ldots x_i)\ldots(x_{j+1}\ldots x_{l-1}x_l)\qquad (l\leqq k)$$

a csoportnak oly szubsztitucziója, mely legfeljebb k elemet transzformál, akkor a csoport föltétlenül tartalmazza a

$$g'=(x_1\ldots x_i)^{-1}\ldots(x_{j+1}\ldots x_{l-1}x_s)^{-1}$$

szubsztitucziót is, tehát a gg' szorzatot is. De mivel

$$gg'=(x_{l-1}x_lx_s),$$

azért a $k>1$ esetben G tartalmazza az alternáló csoportot, ennélfogva:

Ha valamely k-szorosan tranzitiv csoport nem tartalmazza az alternáló csoportot, akkor egyik szubsztitucziója sem transzformálhat $k+1$-nél kevesebb elemet.

A $k>1$ föltételt a tételből, mint fölöslegest, elhagytuk.

Mivel $k>1$ esetben a csoport mindig tartalmaz oly szubsztitucziót, mely n-nél kevesebb elemet transzformál, azért, ha egy ily szubsztituczió

$$g=(x_1\ldots x_i)\ldots(x_{j+1}\ldots x_{k-1}x_k\ldots)\ldots$$

l elemet transzformál, akkor

$$k<l<n.$$

A csoport k-szorosan tranzitiv lévén tartalmazza a

$$g' = (x_1 \ldots x_i)^{-1} \ldots (x_{j+1} \ldots x_{k-1} x_s \ldots)^{-1} \ldots$$

szubsztitucziót is, tehát a gg' szorzatot is.

I. Ha

$$j + 1 < k,$$

akkor x_s-et a g-ben fellépő elemek közül választjuk, tehát gg' tényezőiben legfeljebb n, de $2l—k$-nál több elem nem jelenhetik meg. De mivel ezek közül is $k—2$ invariánsul marad, azért *gg' több elemet nem transzformálhat, mint a hány egység van a $2l—2k+2$ és $n—k+2$ számok kisebbikében.*

II. Ha

$$j + 1 \leqq k,$$

akkor x_s-et a g-ben elő nem forduló elemek közül választjuk, tehát gg' tényezőiben legfeljebb n, de $2l—k+1$-nél több elem nem léphet fel. De mivel ezek közül is $k—1$ invariansul marad, azért *gg' nem transzformálhat több elemet, mint a hány egység van a $2l—2k+2$ és $n—k+1$ számok kisebbikében.*

Ha l olyan, melyre nézve

$$2l—2k+2<l,$$

azaz

$$l<2k—2,$$

akkor eljárásunk végesszámú alkalmazása elvezet oly szubsztituczióhoz, mely nem transzformál k-nál több elemet, ennélfogva:

b) Ha valamely k-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport nem tartalmazza az alternáló csoportot, akkor nem léphet föl benne oly szubsztituczió, mely $2k—2$-nél kevesebb elemet transzformál, ha

$$n > 4.$$

A $k>1$ föltételt, mint fölöslegest elhagytuk; az $n>4$ föltétel meg szükségképeni, mert az $n=4$ esetben l egyedüli értéke 3.

Mivel G-ben van oly szubsztituczió, mely $n—k+1$ elemnél többet nem transzformál, azért, ha

$$n-k+1<2k-2,$$

azaz

$$k>\frac{n+3}{3},$$

akkor G föltétlenül tartalmazza az alternáló csoportot, de a

$$k\leqq\frac{n+3}{3}<n-2,$$

azaz

$$k\leqq\frac{n+3}{3},\quad n>4$$

esetben nem tartalmazhatja, ennélfogva:

A) Minden k-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport tartalmazza az alternáló csoportot, ha

$$k>\frac{n+3}{3}$$

nem tartalmazza, ha

$$k\leqq\frac{n+3}{3}. \qquad (n>4)$$

Analog tételeket találunk már JORDAN,[1] NETTO[2] és BURNSIDE[3] munkálataiban is.

Következmény nincs oly k-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport, melyre nézve:

$$n-2>k>\frac{n+3}{3}.$$

Pl. Ha $n>6$, *akkor nem létezhetik* $n-3$*-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport.*

Legyen ezek után Γ egyik, az egységtől különböző invarians alcsoportja G-nek; mindenekelőtt kimutatjuk, hogy $k>3$ *esetben Γ-ban van oly szubsztituczió, mely n-nél kevesebb elemet transzformál.*

---

[1] JORDAN: Traité des substitutions etc. 1870, p. 75.
[2] NETTO: Substitutionstheorie 1882, p. 75.
[3] BURNSIDE: The theory ot groups 1897, p. 152.

A $j+1<k$ esetben a tétel az I. alatt bemutatott eljárás alapján nyilvánvaló.

A $j+1=k$ esetben a Γ csoportban megvan a

$$g' = (x_1 \ldots x_i)^{-1} \ldots (x_{i+1} \ldots x_{k-2} x_k)^{-1} (x_{k-1} \ldots)^{-1} \ldots$$

szubsztituczió is, tehát a gg' szorzat is, mely az $x_1, \ldots, x_{k-3}$ elemeket invariansul hagyja, tehát gg' n-nél kevesebb elemet transzformál, ha $k>3$; a mi bebizonyítandó volt. Ennélfogva $k>3$ esetben Γ-ra mint invarians alcsoportra szintén érvényesek az I. és II. alatt közölt eredmények, következőleg:

c) Ha valamely k-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport egyik, az egységtől különböző invarians alcsoportja Γ nem tartalmazza az alternáló csoportot és

$$k>3,$$

akkor 1. *Γ-ban nem lehet oly szubsztituczió, mely $2k-2$-nél kevesebb elemet transzformál;* 2. *Γ-ban van oly szubsztituczió, mely $n-k+2$-nél több elemet nem transzformál.*

Ha tehát

$$n-k+2<2k-2, \qquad (k>3)$$

azaz

$$k>\frac{n+4}{3}, \qquad (k>3)$$

akkor Γ föltétlenül tartalmazza az alternáló csoportot. Megjegyzendő, hogy a $k>3$ föltétel mindig teljesül, ha $n>5$.

Ha pedig

$$k \leqq \frac{n+4}{3} < n-2,$$

azaz

$$k \leqq \frac{n+4}{3}, \qquad (n>5)$$

akkor Γ nem tartalmazhatja az alternáló csoportot.

Eldöntetlen az $n=5$ eset, mivel akkor

$$n-2=\frac{n+4}{3}=3,$$

azért, ha

$$k < \frac{n+4}{3}, \qquad (n=5)$$

akkor Γ nem tartalmazza az alternáló csoportot. Ha pedig

$$k = \frac{n+4}{3}, \qquad (n=5)$$

akkor tekintettel arra, hogy az 5 elemet tartalmazó szubsztitucziók nem lehetnek a $j+1=k$ feltételnek megfelelőek, azért Γ-ban föltétlenül kell lenni oly szubsztitucziónak, mely 4 elemet transzformál. Az ilyen szubsztitucziók tipusa:

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4),$$

mely a II. alatt bemutatott eljárással átalakítható oly szubsztituczióvá, mely legfeljebb 3 elemet transzformál, ennélfogva:

B) Egy k-szorosan tranzitiv n-edfokú csoport, minden invarians alcsoportja, az egységet leszámítva, tartalmazza az alternáló csoportot, ha

$$k > \frac{n+4}{3}, \qquad (n>5)$$

vagy, ha

$$k = \frac{n+4}{3}, \qquad (n=5)$$

egyik invarians alcsoportja sem tartalmazza, ha

$$k \leqq \frac{n+4}{3}, \qquad (n>5)$$

vagy, ha

$$k < \frac{n+4}{3}. \qquad (n=5)$$

Következmények:

a) Az n-edfokú szimmetrikus csoportnak az alternáló csoporton s az egységen kívül más invarians alcsoportja nincs, ha $n>4$.

β) Az n-edfokú alternáló csoport egyszerű vagy primcsoport, ha $n>4$.

Az *a)* alatti tétel előfordul már JORDANnál is;[1] ebből származtatják le a *β)* alatti tételt KŐNIG[2] és BIANCHI.[3] Csakhogy míg BIANCHI felhasználja azt a tételt, hogy $\frac{n!}{2}$ nem teljes négyzet, addig KŐNIG ezt nem teszi. BURNSIDE[4] levezetése, még az $n=6$-ra is külön tárgyalást igényel. BEKE[5] indukcziót alkalmaz. Egészen elemi levezetéseket közölnek még NETTO[6] és VOIGT.[7]

Lássuk ezek után Γ tranzitivitásának meghatározását. E végből G_s legyen G-nek oly alcsoportja, mely s elemet hagy invariansul, következőleg G_s a többi $n-s$ elemben $k-s$-szeresen tranzitiv. Ha G_s és Γ közös alcsoportja Γ_s, akkor ez G_s-nek invarians alcsoportja, mivel G_s úgy G_s-et, mint Γ-t invariansul hagyja.

Mivel G_{k-2} az $n-k+2$ betűben kétszeresen tranzitiv, azért Γ_{k-2} mint invarians alcsoportja legalább egyszeresen tranzitiv, ha nem egyenlő az egységgel. De Γ_{k-2} ha $k>3$, nem is lehet egység, mert akkor Γ nem tartalmazhatna oly szubsztitucziót, mely $n-k+2$-nél több elemet nem transzformál.

Mivel G k-szorosan tranzitiv, azért Γ_{k-2} konjugáltjai között van olyan, mely tetszőleges $k-2$ betűt hagy invariansul. Ha tehát Γ_{k-2} egyik szubsztitucziója

$$g=\begin{pmatrix} x_1 \dots x_{k-2} x_\mu & \dots \\ x_1 \dots x_{k-2} x_{k-1} & \dots \end{pmatrix},$$

akkor Γ_{k-2}-nek van oly konjugáltja, melynek egyik szubsztitucziója

$$g'=\begin{pmatrix} x_1 \dots x_{k-3} x_\nu & \dots x_\mu \dots \\ x_1 \dots x_{k-3} x_{k-2} & \dots x_\mu \dots \end{pmatrix}.$$

---

[1] JORDAN: Traité des substitutions 1870, p. 63.

[2] KŐNIG GY.: Math. és term. Ért. 1882—3.

[3] BIANCHI: Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni 1900, p. 54.

[4] BURNSIDE: Theory of groups 1897, p. 153.

[5] BEKE: Math. és Fiz. Lapok 1898, p. 55.

[6] NETTO: Substitutionentheorie 1882, p. 91.

[7] VOIGT: Resolution algebrique d. equations 1895, p. 18.

Mivel

$$gg' = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_{k-3}\, x_\nu & x_\mu & \dots \\ x_1 \dots x_{k-3}\, x_{k-2} & x_{k-1} & \dots \end{pmatrix}$$

azért Γ_{k-3} legalább kétszeresen tranzitiv stb. Tehát:

C) Egy n-edfokú k-szorosan tranzitiv csoport minden az egységtől különböző invarians alcsoportja legalább k—1-szeresen tranzitiv, ha $k>3$.

Ezt a tételt az $k>3$ föltétel leszámításával először Jordan[1] vezeti le. Burnside[2] levezetése téves.

Tételünk a $k=3$ esetben csak akkor nem érvényes, ha Γ minden szubsztitucziója n elemet transzformál és $i+1=k$, mert ekkor:

1. *Γ minden szubsztitucziója csak két betűből álló cziklusokat tartalmazhat*, mert különben volna benne oly szubsztituczió, mely n-nél kevesebb elemét transzformálna.

2. Ugyanezen okból *Γ-ban csak egy oly szubsztituczió van, mely x_1-et x_i-be transzformálja, tehát rendszáma n.*

3. *Γ Abel-féle csoport, tehát rendszáma 2^m*, mert ha a $g=(x_1x_i)\dots$ és $g'=(x_1x_k)\dots$ szorzata $(x_1x_l)\dots$, akkor

$$g = (x_1x_i)\dots(x_kx_l)\dots,$$
$$g' = (x_1x_k)\dots(x_1x_l)\dots,$$

tehát $gg'=g'g$.

4. *Γ egyszeresen tranzitiv.*

Ezt a kivételes esetet először Burnside vette észre az imént czitált helyen.

A *C)* alatti tételnek direkt következménye az *α)* alatti tétel; azonban a *β)* alatti csak $n>6$ esetben adódik ki. Ugyanis az alternáló csoport egyszerűségére vonatkozó kérdés így is formulázható: Van-e az alternáló csoportnak $n-3$-szorosan tranzitiv invarians alcsoportja? $n>6$ esetben nem lehet, mert hiszen ekkor $n-3$-szorosan tranzitiv csoport nem is létezik.

---

[1] Jordan: Traité d. Subs. p. 62.

[2] Burnside: The theory of groups, p. 188.

Hasonló módon próbálta JORDAN[1] az alternáló csoport egyszerűségére vonatkozó tételt levezetni, de csak úgy juthatott el a tételhez, hogy az alternáló csoportot $n-1$-szeresen tranzitivnek vette.

A) alatti tételünket még így is megállapithatjuk. Ha G-ben m oly szubsztituczió van, mely k elemet invariansul hagy, akkor rendszáma

$$m \,.\, n(n-1) \ldots (n-k+1).$$

Mivel G-ben, ha nem tartalmazza az alternáló csoportot, nincs oly szubsztituczió, mely $2k-3$ vagy ennél kevesebb elemet transzformál, azért, ha az n elemből $2k-3$ tetszőlegest kiválasztunk s képezzük ezeknek a szimmetrikus csoportját s azt G_1-nek nevezzük, akkor G és G_1 fölcserélhetők s az egységen kivül más közös szubsztitucziót nem tartalmaznak, következőleg GG_1 oly csoport, melynek rendszáma

$$m \,.\, n(n-1) \ldots (n-k+1) \,.\, (2k-3)\,!$$

A mi nem lehet osztója $n!$-nek, ha

$$n-k < 2k-3,$$

azaz

$$k > \frac{n+3}{3},$$

a mivel az *A)* alatti tételt igazoltuk.

Ha G tartalmazza az alternáló csoportot, de Γ az egységtől különböző invarians alcsoportja nem, akkor tekintettel arra, hogy a *C)* alatti tétel értelmében a szimmetrikus csoportnak ily invarians alcsoportja nem lehet, azért G csakis az alternáló csoport lehet, ha $n>4$. Következőleg Γ, ha létezik, $n-3$-szorosan tranzitiv és nem lehet benne oly szubsztituczió az egységen kivül, mely $n-3$ elemet invariansul hagy, mert ekkor lennének benne hármas cziklusok is. Tehát Γ rendszáma

$$\frac{n!}{3!}.$$

[1] JORDAN: Traité, p. 63.

Mivel Γ-ban nincsenek oly szubsztitucziók, melyek $2k-3$, azaz a jelen esetben $2n-7$ elemet vagy ennél kevesebb elemet transzformálnak, azért a föntebbiek szerint

$$\frac{n!}{3!}(2n-7)!$$

osztója az n!-nek, a mi nem lehet, ha

$$2n-7>3,$$

azaz $n>5$, a mi szintén a *β)* tételt mondja ki $n>5$-re.

Egy másik bizonyitás, mely direkt szolgáltatja az alternáló csoport egyszerűségére vonatkozó tételt a következő:

Ha Γ az egységtől különböző oly invarians alcsoport, mely nem tartalmazza az alternáló csoportot, akkor Γ a szimmetrikus csoportban nem lehet invarians alcsoport (α), tehát konjugáltja Γ_1, mely az alternáló csoportnak szintén invarians alcsoportja, különbözik Γ-tól. Mivel Γ-nak és Γ_1-nek közös alcsoportja invarians alcsoportja a szimmetrikus csoportnak, azért Γ és Γ_1 az egységen kivül más közös elemet nem tartalmaznak, következőleg a $\Gamma\Gamma_1$ szorzatban

$$\left(\frac{n!}{3!}\right)^2$$

különböző szubsztituczió van és mivel ezek az alternáló csoportban is fellépnek, azért

$$\left(\frac{n!}{3!}\right)^2 \leqq \frac{n!}{2},$$

a mi az $n>4$ esetben sohasem lehet, a mivel az alternáló csoport egyszerűsége az $n>4$ esetekben nyilvánvalóvá vált.

Eljárásunkat kiterjesztve az $n=4$ esetre, könnyű meggyőződni, hogy a 4-edfokú szimmetrikus csoportnak van egy kétszeresen és egy egyszeresen tranzitiv invarians alcsoportja. A 4-edfokú alternáló csoportnak pedig van egy egyszeresen tranzitiv invarians alcsoportja.

Suták József.

MEGADOTT HATVÁNYSOR FOLYTATÁSÁNAK ANALITIKAI ELŐÁLLÍTÁSA.

(Második közlemény.)

PAINLEVÉ módszere.

PAINLEVÉnek e tárgyra vonatkozó vizsgálatai a MITTAG-LEFFLER-féle vizsgálatokkal körülbelül egy időben jelentek meg.[1] Mi azt a fogalmazást követjük, melyben PAINLEVÉ ez eredményeket BOREL egy nemrégiben megjelent művének függeléke gyanánt közli.[2]

PAINLEVÉ a generátor-sor (série génératrice) fogalmából indul ki: Legyen $f(t)$ a t változónak oly analitikai függvénye, mely a 0 helyen szabályosan viselkedik s így e hely környezetében az

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots$$

alakú hatványsorba fejthető.

Legyen másrészt

$$\varphi_0(a_0)+\varphi_1(a_0, a_1)+\cdots+\varphi_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)+\cdots$$

egy oly sor, melynek tetszésszerinti i-ik tagja az $a_0, a_1, \ldots, a_i$ együtthatóknak megadott egész függvénye. E sort akkor nevezzük *generátor-sornak*, ha összetartó s megadja $f(1)$ értékét, minden

[1] PAINLEVÉ: Sur le développement des fonctions analytiques, pour les valeurs réelles de la variable. Comptes rendus. 31. janvier, 1898.

— Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique. Ugyanott: 23 mai, 1899; 3. juillet 1899.

[2] BOREL: Leçons sur les fonctions de variables réelles etc. Paris. 1905. Ennek függeléke: PAINLEVÉ. Sur le développement des fonctions analytiques.

olyan $f(t)$ függvényre nézve, mely a $0 \leqq t \leqq 1$ egyenlőtlenséggel definiált számköz minden helyén szabályosan viselkedik.

Ha minden φ_n az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ együtthatóknak homogén lineáris függvénye, akkor sorunkat *normál* generátor-sornak mondjuk.

Felteszszük egyelőre, hogy ismerünk már egy ilyen generátor-sort. Jelentse z a számsík tetszésszerinti helyét és legyen

$$f_1(t) = f(zt)$$

Fejtsük ki $f_1(t)$-t MACLAURIN-sorba:

$$f_1(t) = a_0 + a_1 zt + a_2 z^2 t^2 + \cdots + a_n z^n t^n + \cdots$$

Így tehát a generátor-sorral való előállítás ily alakú:

$$\varphi_0(a_0) + \varphi_1(a_0, a_1 z) + \varphi_2(a_0, a_1 z, a_2 z^2) + \cdots +$$
$$+ \varphi_n(a_0, a_1 z, \ldots, a_n z^n) + \cdots$$

Most csak arra a kérdésre kell megfelelnünk, hogy milyen tartományban használhatjuk fel e soralakot az $f_1(t) = f(zt)$ függvény előállítására.

Az előbb mondottak szerint ezt mindig megtehetjük, ha az $f_1(t)$ függvény szabályosan viselkedik a 0-tól 1-ig terjedő számköz helyein, a mi más szóval azt jelenti, hogy az $f(z)$ függvény szabályosan viselkedik a 0 és z pontot összekötő egyenes darabon. (A határokat is beleértve.)

Látjuk tehát, hogy a keresett helyek azonosak a MITTAG-LEFFLER-féle csillag helyeivel.

De akkor kimondhatjuk a következő tételt:

Ha a generátor-sorban az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ értékek helyett az $a_0, a_1 z, a_2 z^2, \ldots$ értékeket teszszük, akkor az így nyert sor az A csillag minden helyén összetartó és előállítja az $f(z)$ függvényt, illetőleg e függvény megfelelő ágát.

A normál generátor-sor azért is nagyon figyelemre méltó, mert ebből a fenti helyettesítéssel polinomiális sort kapunk.

Ugyanis

$$\varphi_n(a_0, a_1 z, \ldots, a_n z^n) = \nu_0 a_0 + \nu_1 a_1 z + \cdots + \nu_n a_n z^n,$$

a hol a ν-k előre megadott számértéket jelentenek.

Az így nyert polinomiális sorokat PAINLEVÉ MITTAG-LEFFLER-féle sornak vagy röviden (M)-sornak nevezi. (Ez utóbbi jelölés BORELtől ered.)

Áttérünk most PAINLEVÉ dolgozatának legérdekesebb részére: *egy normál generátor sor elméleti előállítására.*

Rajzoljunk a t komplex változó síkjában oly zárt görbét C-t, mely a valós tengelynek 0-tól 1-ig terjedő részét magába zárja. A C görbe által határolt területet *konform* átalakítással egy a τ változó síkjában a 0 hely körül leírt Γ körön akarjuk ábrázolni. Egy és csak egy olyan konform ábrázolás létezik, mely a $t=0$ pontnak a $\tau=0$ pontot, a $t=1$ pontnak pedig a $\tau=1$ pontot felelteti meg. Legyen e konform átalakítás a $t=\psi(\tau)$ és $\tau=\Psi(t)$ összefüggésekkel jellemezve. Világos, hogy az előbbi feltételek mellett a Γ körnek 1-nél nagyobb, meghatározott sugara van.

Legyen most már $f(t)$ egy a C görbe belsejében és kerületén holomorf analitikai függvény. Természetesen e függvény abszolut értéke úgy a görbe belsejében, mint kerületén kisebb mint egy bizonyos pozitiv H mennyiség. Ha t-t a $\psi(\tau)$ függvénynyel helyettesítjük, az

$$f[\psi(\tau)] = F(\tau)$$

függvény is holomorf lesz a Γ kör belsejében. E körben tehát MACLAURIN-sorba fejthető:

$$F(\tau) = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 - \cdots$$

E sor az 1 helyen összetartó és megadja az

$$F(1) = f(1)$$

értéket. (A $\tau=1$ pontnak ugyanis megállapodásunk értelmében a $t=1$ pont felel meg.)

Az

$$f(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots \tag{46}$$

sor maradéktagja

$$R_n = A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots$$

egy ismert tétel szerint abszolut értékre nézve kisebb, mint a

$$\frac{H}{\rho^n(\rho-1)}$$

mennyiség.

Másrészt az A együtthatók az a együtthatók homogén, lineáris kifejezései. Ugyanis írhatjuk, hogy

$$t=\psi(\tau)=m_1\tau+m_2\tau^2+\cdots$$

(E sorban az első tag csak azért maradt el, mert feltevésünk szerint $\psi(0)=0$; e körülmény a következőkre nézve nem is lényeges.)

Az

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots$$

hatványsorba t fenti értékét téve, ered

$$f(t)=a_0+m_1a_1\tau+(m_2a_1+m_1^2a_2)\tau^2+\cdots$$

Innét látnivaló, hogy az A együtthatók csakugyan lineár homogén formái az a együtthatóknak.

Legyenek most már a t változó síkjában $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$ oly zárt görbék, melyek a valós tengelynek 0-tól 1-ig terjedő darabját magukba zárják és ha n minden határon túl nő, ez egyenes darab felé konvergálnak. Minden C_i görbének konform leképezését elvégezhetjük oly Γ_i körre, mely a C_i görbével olyan viszonyban lesz, mint Γ volt a C görbével. E Γ_i kör sugara ρ_i szintén nagyobb, mint 1. Minden i-re nézve találhatunk oly elég nagy n számot, hogy

$$\frac{1}{\rho_i^n(\rho_i-1)}<m_i,$$

a hol m_i egy konvergens sor i-ik tagját jelentse. Jelöljük ezen n számok közül a legkisebbet N_i-vel. Legyen továbbá például

$$m_i=\frac{1}{i^2}.$$

Ha most már $f(t)$ a $0\leq t\leq 1$ helyeken szabályosan viselkedik, akkor ugyanezt mondhatjuk egy a $0-1$ egyenes darabot körülvevő, eléggé belapított C görbe belső és kerületi helyeiről is. Minden C_i görbére nézve képezhetünk 46)-tal analóg sort. Egy a C_i görbékre vonatkozó feltevésünkből világos, hogy ha i elég nagy, a C görbe a C_i görbét magába zárja, tehát a C_i-nek megfelelő sor összetartó és megadja $f(1)$ értékét. Ha e sort az n-ik taggal berekesztjük, akkor az elkövetett hiba abszolut értéke:

$$< \frac{H}{\rho_i^n(\rho_i-1)}, \tag{47}$$

illetve

$$< \frac{H}{i^2}, \text{ ha } n=N_i. \tag{48}$$

A megmaradt tagokat azután összefoglalhatjuk egy a C_i görbének megfelelő ω_i polinóm alakjában:

$$\omega_i = a_0+\mu_{1i}\,a_1+\mu_{2i}\,a_2+\cdots+\mu_{ni}\,a_n$$

a hol úgy $n=N_i$, mint a $\mu_{1i}, \mu_{2i}, \ldots, \mu_{ni}$ együtthatók i-től függő számértékek.

Legyen

$$\omega_0 = a_0.$$

Ha most

$$\varphi_0=\omega_0=a_0,\ \varphi_1=\omega_1-\omega_0, \ldots, \varphi_i=\omega_i-\omega_{i-1}, \tag{49}$$

akkor a

$$\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_i+\cdots=a_0+\sum_{i=1}^{\infty}(\nu_{i1}a_1+\cdots+\nu_{ni}a_n) \tag{50}$$

sor *normál generátor-sor*. E sor feltétlenül összetartó és értéke $f(1)$-et adja, bármilyen függvényt jelentsen is $f(t)$, *ha csak ez a függvény* $0-1$ *egyenes darabon szabályosan viselkedik.* Ugyanis e sor első $i+1$ tagjának összege ω_i és mint kimutattuk

$$|f(1)-\omega_i| < \frac{H}{i^2},$$

ha i elég nagy. De másrészt

$$|\varphi_i| < \frac{2H}{i^2},$$

s így a fenti sor *feltétlenül* is összetartó.

Még egy megjegyzést kell tennünk: Tudjuk, hogy minden φ_i az n együtthatóknak homogén lineár kifejezése. De itt egy nehézséggel találkozunk. Ugyanis könnyen lehetséges, hogy $n=N_i>i$, pedig e tárgyalások elején adott definiczió szerint φ_i kifejezésében csak az $a_0, a_1, \ldots, a_i$ együtthatók fordulhatnak elő. E nehézség csak látszólagos, mert közbeiktathatunk elegendő számban a

$$\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\cdots$$

sor tagjai közé oly tagokat, a melyeknek értéke 0, vagy a melyek páronként lerontják egymást.

Tehát állításunk teljes egészében be van bizonyítva.

Mint mondottuk e sor $f(z)$-t egy (M) sor alakjában állítja elő, vagyis

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(a_0,\ a_1z,\ a_2z^2, \ldots, a_nz^n).$$

E sor egyenletesen összetartó minden az A csillag belsejében fekvő A' tartományban. A bizonyítást pár szóval vázoljuk.

Ha t a komplex változó síkjában egy C görbét ír le és képezzük az (ugyanezen síkban fekvő) A' tartomány összes z_0 helyeire a $z=z_0t$ értékeket, akkor z minden egyes z_0 értékre nézve egy C_{z_0} görbét ír le, melyet úgy nyerünk, hogy C-t a kezdőpontból bizonyos hasonlósági viszonynyal átalakítjuk s azután e pont körül bizonyos szöggel elforgatjuk. Ugyanezt az eljárást az összes C_i görbékre nézve elvégezhetjük. Világos, hogy C_{iz_0} görbe a $0-z_0$ egyenes darabot magába zárja és erre redukálódik, ha C_i-t vég nélkül közelítjük a $0-1$ egyenes darab felé. Ha z_0 az A' tartományban minden értéket felvesz, akkor a C_{iz_0} terület különböző helyzeteiben egy B_i tartományt borít be, mely tartomány vég nélkül közeledik A'-höz, ha C_i közeledik a $0-1$ egyenes darabhoz, vagyis ha i minden határon túl nő. Ez eredményből előbbi állításunk már könnyen bebizonyítható.

Minthogy a tétel több változóra nézve könnyen általánosítható, PAINLEVÉ mindjárt ilyen alakban mondja ki:

A generátor-sorból származtatott (M) sorok feltétlenül összetartók az A csillagban és egyenletesen összetartók minden e *csillag belsejében fekvő véges A' tartományban, bármennyi változótól függjön is f.*

De ekkor egy ismert tétel szerint e sorok az A csillagban, tetszésszerinti sokszor tagonkint integrálhatók és differencziálhatók (u. i. minden polinóm analitikai függvény) s az így nyert sorok összetartására nézve szóról-szóra ugyanaz áll, a mi az eredeti sorra.

Painlevé nem csak elméletileg, de ténylegesen is előállít egy normál generátor-sort. A konform átalakításra a

$$t = a \log(\beta\tau + b)$$

függvényt használja fel, a melyben a, β és b megfelelően választott állandók.

Azt is megmutatjuk, hogy Painlevé mily egyszerű úton vezeti le az egyenes vonalú csillagból a *görbe vonalú csillagot*, melynek előnyeiről már egyszer megemlékeztünk.

Az $f(t)$ függvénybe tegyünk t helyett egy $g(\theta)$ függvényt, melynek következő tulajdonságai vannak: Szabályosan viselkedik a $0 \leqq \theta \leqq 1$ értékekre nézve, de ezen számközön belül *nem valós értékeket* is felvesz, azonkívül a $\theta = 0$ helyen értéke 0, a $\theta = 1$ helyen pedig értéke 1.

A $t = g(\theta)$ függvény tehát addig, a míg θ a valós értékek során 0-tól 1-ig változik, oly l görbét ír le síkjában, mely a $t = 0$ ponttól a $t = 1$ pontig halad. Természetes, hogy ha az $f(t)$ függvény az l görbe mentén (a határokat is beleértve) szabályosan viselkedik, akkor az $f_1(\theta) = f[g(\theta)]$ függvény is szabályosan viselkedik, ha $0 \leqq \theta \leqq 1$. Legyen most S egy generátor-sor és használjuk fel e sort az

$$f_1(\theta) = a'_0 + a'_1\,\theta + a'_2\,\theta^2 + \cdots$$

függvény előállítására, a melyet a jelzett átalakítással az

$$f(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots$$

függvényből nyertünk. Tudjuk, hogy ha a generátor-sorba az $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots$ értékeket tényleg helyettesítjük, az így nyert sor $f_1(1) = f(1)$ felé konvergál.

Könnyen kimutatható továbbá, hogy az a'_0, a'_1, $a'_2, \ldots$ értékek az a_0, a_1, $a_2, \ldots$ értékeknek lineár homogén formái. Ha e formákat S-be helyettesitjük, új generátor-sort kapunk.

E sor összetartó és megadja $f(1)$ értékét, ha csak e függvény az l úton (a határokat is beleértve) szabályosan viselkedik. Az ilyen sorokat (PAINLEVÉ terminológiáját követve) *l-fajú generátor-sornak* (série génératrice d'espèce l) nevezzük és S_l-lel jelöljük. Közvetetlenül világos, hogy ha az eredeti sor normál-sor volt, akkor az új is az.

Ha most az $f(t)$ függvény helyett az $f(zt)$ függvényt vizsgáljuk, (a melyben z-t egyelőre állandónak tekintjük), akkor az S_l sorban az a_0, a_1, $a_2, \ldots$ értékeket az a_0, $a_1 z$, $a_2 z^2 \ldots$ értékekkel kell helyettesíteni. Az így nyert sor mindig összetartó a $z = z_0$ helyen, ha az $f(z_0 t)$ függvény szabályos marad, míg t az l úton 0-tól 1-be halad. Ezeken a helyeken a sor meg is adja $f(z_0)$ értékét.

Az előbbi feltevés tulajdonképen azzal a feltevéssel egyenértékű, hogy az $f(z)$ függvény a kezdőponttól kiindulva az l_{z_0} úton a z_0 pontba analitikailag folytatható.

A feltételünket kielégítő z_0 helyek összességéről azt mondjuk, hogy ezek egy *görbevonalú, l-fajú csillagot* alkotnak, a melyet A_l-lel jelölünk.

Ha valamely z_0 hely nincs e csillag belsejében, ez azt jelenti, hogy az l_{z_0} görbe legalább egy szinguláris helyen pl. ξ-n átmegy. De tudvalévőleg az l_{z_0} görbe egyes helyeihez tartozó számértékeket úgy kapjuk, hogy az l görbe egyes helyeihez tartozó t számértékeket z_0-lal szorozzuk.

De ekkor kell, hogy az l görbének legyen oly t helye, hogy

$$z_0 t = \xi,$$

vagyis

$$z_0 = \frac{\xi}{t} = \xi t',$$

ha $\frac{1}{t}$ helyett t'-t írunk.

Ha tehát az l görbére a $t'=\frac{1}{t}$ transzformácziót alkalmazzuk s az így nyert görbét l'-vel jelöljük, akkor a függvény összes szinguláris helyeire nézve képezhetjük a megfelelő l'_ξ görbéket. E görbék egymáshoz mind hasonlók lesznek és az egyes szinguláris helyekből kiindulva a végtelenbe nyúlnak. Ezek mentén alkalmazva a metszeteket, a sik megmaradt része adja az A_l görbevonalú csillagot.

E csillagtartomány alakjának megfelelő megválasztásával elérhetjük aztán, hogy az l görbéhez tartozó generátor-sorból nyert (M) sor a függvény tetszésszerinti szabályossági helyén összetartó legyen és meg is adja a függvény értékét. Természetes, hogy ez a megjegyzés az eredeti MITTAG-LEFFLER-féle sorokra nézve is érvényes, mert hisz ezek az imént levezetett sorok speciális alakjai.

PAINLEVÉ még egyéb szempontokból is vizsgálja e kifejtéseket. Így például felveti azt a kérdést, hogyan viselkedik egy (M) sor a csillagtartomány határán. E kérdés részletezésére még visszatérünk.

BOREL módszere.

BOREL[3] abból a tényből indul ki, hogy többen így RUNGE,[4] PAINLEVÉ[1] és HILBERT[5] kimutatták, hogy az $\frac{1}{1-x}$ függvény végtelen sokféleképen fejthető polinomiális sorba, mely sor minden olyan x helyen összetartó, mely nem fekszik a valós tengelynek $+1$-től $+\infty$-ig terjedő részén és egyenletesen összetartó minden olyan tartományban, mely a valós tengelynek

[3] BOREL: Addition au mémoire sur les séries divergentes. Annales de l'École Normale. 1899.
Sur les séries de polynômes et de fractions rationelles. Acta Math. t. 24.
Leçons sur les séries divergentes. Gauthier-Villars. 1901.

[4] RUNGE: Lásd e dolgozat első közleményét.[11]

[5] HILBERT: Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Function einer Variabeln in eine unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihe. Göttinger Nachrichten. 1897.

ezt a részét teljesen kizárja magából. BOREL kimutatja, hogy e tételből a MITTAG-LEFFLER-féle tétel nagyon egyszerűen következik. Ugyanezt a megjegyzést teszi PHRAGMÉN[6] is.[7] (Mint látni fogjuk, e meggondolásokban a CAUCHY-féle integrál előállítás révén ugyanaz a szerep jut az $\frac{1}{1-x}$ függvénynek, mint például a részlettörteknek a raczionális törtfüggvények felbontásában.)[8]

---

[6] PHRAGMÉN: Sur une extension d'un théorème de MITTAG-LEFFLER. Comptes Rendus. 12 juin, 1899.

[7] MITTAG-LEFFLER az *Acta Mathematica*-ban megjelent ötödik közleményében (29. k.) megjegyzi (117—118. o. lábjegyzet), hogy BOREL és PHRAGMÉN midőn bebizonyítják, hogy: ha a kivánt sorbafejtés lehetséges $\frac{1}{1-x}$-re, úgy lehetséges minden $F(x)$ függvényre nézve, nem vesznek tudomást arról, hogy ő ezt a tételt már 21 éve bebizonyította egy közleményében, melynek czíme: Fullständig analytisk framställning af hvarje entydig monogen funktion, hvars singulära ställen ut göra en värdemängd af första slaget. — Öfversigt af K. Vet. AK. Förhandl. 8 febr. 1882. — E helyen MITTAG-LEFFLER nem mondja ki explicit alakban e tételt, de a függvénynek oly előállítását adja, melyből a tétel tényleg könnyen következik. Mind a mellett BOREL eredményei több szempontból vetnek új fényt e kérdésre és épen ezért közöljük eljárását.

MITTAG-LEFFLER ugyanerről a kérdésről az idézett helyen még így is nyilatkozik: Les auteurs qui ont parlé de la simplification de ma première démonstration (ez alatt az első közleményünkben ismertetett bizonyítást érti) à laquelle d'autres auteurs seraient arrivés aprés moi, ne semblent pas avoir saisi le fond de ma pensée (voir p. ex. PRINGSHEIM: *J. Hadamard: La série de* TAYLOR *et son prolongement analitique.* — Archiv der Math. und Physik. 3. Reihe. Bd. 3. p. 289).

[8] Az $\frac{1}{1-x}$ függvénynek azok az előállításai, melyekre BOREL hivatkozik, sokkal bonyolultabbak MITTAG-LEFFLERénél s így BOREL általános eljárásának látszólag nagyon kevés előnye van a MITTAG-LEFFLER-féle speciális előállítással szemben. Azóta azonban sikerült az $\frac{1}{1-x}$ függvény számára nagyon egyszerű sorbafejtéseket találni. Így PICARD a CAUCHY-LIPSCHITZ-féle eljárás segélyével polinomiális sorba fejt oly függvényeket, melyek valamely

$$\frac{dy_i}{dx} = Y_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

alakú differencziálegyenletrendszernek tesznek eleget, a hol az Y_i kifeje-

Fejtsük most már a megadott $F(x)$ függvényt a 0 hely körül MACLAURIN-sorba.

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{50}$$

Válaszszuk $\frac{1}{1-x}$-nek egy meghatározott $\Sigma P_n(x)$ alakú előállítását

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{kn} a_{n,k} x^k. \tag{51}$$

Legyen most

$$b_{n,k} = c_k a_{n,k}, \tag{52}$$

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{kn} b_{n,k} x^k, \tag{53}$$

akkor, mint BOREL kimutatja, a

$$\Sigma Q_n(x)$$

polinomiális sor előállítja az egész csillagtartományban az $F(x)$ függvényt, illetőleg ha ez többértékű, az $FA(x)$ függvényágat. A sor egyenletesen konvergál minden olyan tartományban, mely teljesen a MITTAG-LEFFLER-*féle csillag belsejében fekszik.*

A mint már említettük BOREL ez állítását a CAUCHY-féle integrálelőállítás segélyével bizonyítja be.

---

zések $y_1, y_2, \ldots, y_n$ raczionális egész függvényeit jelentik. Az $\frac{1}{1-x}$ függvény nyilván ebbe a függvényosztályba tartozik, mert hiszen eleget tesz a

$$\frac{dy}{dx} = y^2$$

egyenletnek. Az $\frac{1}{1-x}$ függvény számára így nyert egyszerű sorbafejtést GOURSAT elemi eszközökkel is levezeti. — Lásd PICARD: Sur les développement en séries des intégrales des équations différentielles par la méthode de CAUCHY. — Comptes Rendus (5 juin, 1899). — PAINLEVÉ: Ugyanez. — Comptes Rendus (19 juin, 1899). — PICARD: Traité d'Analyse. éd. 2. t. II. 1904. Gauthier-Villars (p. 354). — GOURSAT: Sur quelques développements de $\frac{1}{1-x}$ en série de polynômes. — Bulletin de DARBOUX, t. 27.

Az x komplex változó síkjában jelentsen C oly tetszésszerinti zárt görbe vonalat, melyet minden a kezdőpontból kiinduló félsugár csak egy pontban metsz, s a mely teljesen az A csillag belsejében fekszik. Az integrálást e görbe mentén eszközöljük:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{F(z)}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{z}}\,dz,$$

a hol x egy a C görbe belsejébe eső tetszésszerinti komplex számértéket jelent, melyet egyelőre változatlannak tekintünk. Legyen

$$\frac{x}{z} = u.$$

Ha z a C görbén mozog, akkor u oly Γ görbét ír le, mely az $(1, \infty)$ bevágást nem metszi át; mert ha u 1-nél nagyobb pozitiv valós értéket venne föl, akkor az

$$x = uz$$

egyenlőségből következnék, hogy x a z pontot a kezdőponttal összekötő félsugáron fekszik és a kezdőponttól való távolsága nagyobb, mint a z ponté. De ekkor az x hely a C görbén kívül feküdnék.

A Γ görbe belsejében fekvő x helyekre nézve tehát írhatjuk:

$$\frac{1}{1-\dfrac{x}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{x}{z}\right).$$

Ez a sor feltevésünk szerint egyenletesen összetartó, ha x egy a C görbe belsejében fekvő meghatározott helyet, z pedig egy a C görbe mentén változó helyet jelent. Így tehát tagonkint integrálhatunk.

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{F(z)}{z} P_n\left(\frac{x}{z}\right) dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z} dz + a_{n,1} x \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z^2} dz + \cdots +$$

$$+ a_{n,k_n} x^{k_n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z^{k_n+1}} dz.$$

Azonban (50) szerint a függvény hatványsorba fejtett alakja

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

tehát

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{F(z)}{z^{k+1}} dz = c_k,$$

vagyis (52) tekintetbe vételével a fenti egyenlőség így is írható

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C P_n\left(\frac{x}{z}\right) \frac{F(z)}{z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x).$$

Könnyen átlátható, hogy e sor egyenletesen konvergál $F(x)$ felé minden a csillag belsejében fekvő tartományban. Könnyen bebizonyítható azonkívül, hogy, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ sor feltétlenül összetartó, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)$ sor is az.

Látnivaló, hogy e tétel jóval általánosabb jellegű, mint az eredeti Mittag-Leffler-féle. A Mittag-Leffler-féle eredeti előállítást ugyanis az $\frac{1}{1-x}$-nek egy bizonyos meghatározott speciális sorbafejtéséből kapjuk, abból t. i., mely $\frac{1}{1-x}$-nek Mittag-Leffler-féle sorbafejtése.

Riesz Marczell.

Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

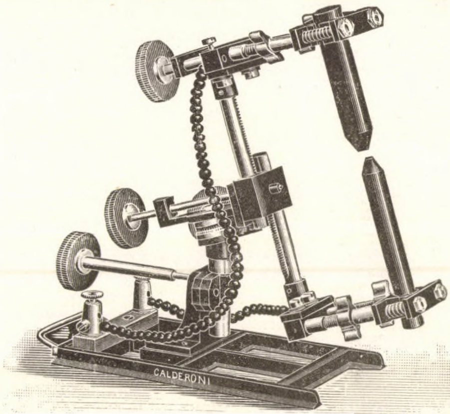
Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **23.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—



Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480 cm. négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**-	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

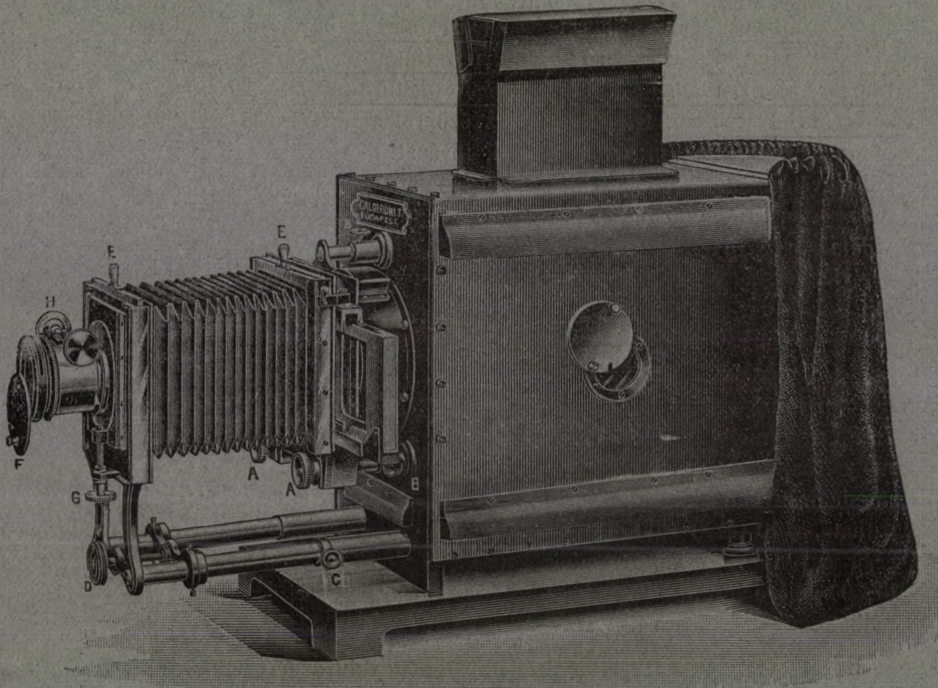
Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.—**

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHETEDIK ÉVFOLYAM

IV—V. FÜZET 1908 ÁPRILIS—MÁJUS.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1908.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhetedik társulati év 1908 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

A LOGIKA ALGEBRÁJA.[1]

1. Bevezetés. A logika algebráját GEORGE BOOLE (1815—1864) alapította meg, továbbfejlesztette és tökéletesítette ERNST SCHRÖDER (1841—1902). E kalkulus alaptörvényeit az okoskodás elveinek, a «gondolkodás törvényeinek» kifejezésére alkották meg, de tisztán formális (mathematikai) álláspontból is tekinthető, mint néhány tetszőlegesen választott elven nyugvó algebra. Hogy e kalkulus megfelel-e és hogy milyen mértékben felel meg az ész tényleges műveleteinek és hogy alkalmas-e kifejezni, sőt helyettesíteni az okoskodást, az tisztán philosophiai kérdés; mi nem ezt fogjuk vizsgálni. Formális értéke és haszna a mathematikus számára teljesen független interpretácziójától és a logika problémáira való alkalmazásától. Egy szóval: nem mint logikát, hanem mint algebrát fogjuk kifejteni.

A Boole-Schröder-féle rendszer irodalma.

GEORGE BOOLE: *The mathematical analysis of Logic.* (Cambridge and London, 1847.)

— *An investigation of the Laws of Thought.* (London and Cambridge, 1854.)

W. STANLEY JEVONS: *Pure logic.* (London, 1864.)

— *On the mechanical performance of logical inference.* (Phil. Trans., 1870.)

---

[1] Az eredeti franczia munka: *L'Algèbre de la Logique* par LOUIS COUTURAT (Paris, Gauthiers-Villars, 1905) mint a «Scientia» gyűjtemény physikai és mathematikai sorozatának 24. kötete jelent meg. A szerző és kiadó lekötelező szívességgel járultak hozzá, hogy ezt az érdekes művet a magyar mathematikus közönségnek e lapok hasábjain bemutassuk. *Szerk.*

Ernst Schröder: *Der Operationskreis des Logikkalkuls.* (Leipzig, Teubner, 1877.)

— *Algebra der Logik*, I. k. (1890), II. k. 1. része (1891), 2. része (Schröder hagyatékából kiadta Eugen Müller, 1905), III. k.: *Algebra und Logik der Relative*, 1. rész (1895); 2. rész előkészületben (Leipzig, Teubner).

Al. Macfarlane: *Principles of the Algebra of Logic, with examples.* (Edinburgh, 1879.)

John Venn: *Symbolic Logic*, 1. kiadás, 1881; 2. kiadás, 1894. (London, Macmillan.) [Történeti és bibliographiai szempontból értékes munka.]

Studies in Logic by members of the Johns Hopkins University. (Boston, 1883). Szerzők: Mrs. Ladd-Franklin, Mitchell, Peirce stb.

Whitehead: *A Treatise on universal Algebra*, I. k. (Cambridge, University Press, 1898.)

— *Memoir on the Algebra of symbolic Logic.* (Am. Journ. of Math., XXIII. k., 1901.)

Eugen Müller: *Über die Algebra der Logik:* I. *Die Grundlagen des Gebietekalkuls; Das Eliminationsproblem und die Syllogistik.* (Leipzig, Teubner, 1900, 1901.)

Johnson: *Sur la théorie des égalités logiques.* (Bibliothèque du Congrès de Philosophie, III. k., Paris, A. Colin, 1901.)

Platon Poretsky: *Sept lois fondamantales de la théorie des égalités logiques.* (Kazan, 1899.)

— *Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques.* (Kazan, 1902.)

— *Exposé elementaire de la théorie des égalités logiques à deux termes.* (Révue de Métaphysique et de Morale, VIII. k., 1900.)

— *Théorie des égalités logiques à trois termes.* (Bibl. du Congr. de Philosophie, III. k., Paris, Colin, 1901.)

— *Théorie des non-égalités logiques.* (Kazan, 1904.)

Huntigton: *Sets of indenpendent postulates for the Algebra of Logic.* (Trans. of the Am. Math. Soc., V. k., 1904.)

2. A logikai kalkulus két interpretácziója. Egy különösen érdekes körülmény jelentkezik itten: a szóban forgó algebrának magában a logikában két különböző interpretácziója lehetséges. Ezek teljesen párhuzamosan vonulnak egymás mellett a szerint, hogy a betűk fogalmakat vagy kijelentéseket jelölnek. E két interpretáczió visszavezethető egyetlen egyre, mint ezt Boole és Schröder tette, ha egyrészt a fogalmakat, másrészt a kijelentéseket bizonyos osztályokhoz tartozóknak tekintjük: egy fogalom meghatározza azon tárgyak összességét, a melyek alája tartoznak (s a mit a logikában a fogalom *kiterjedésének* neveznek); egy kijelentés pedig meghatározza azon esetek vagy időpontok összességét, melyekben igaz (s a melyet az analógia folytán szintén kiterjedésnek lehet nevezni); ily módon a fogalmi kalkulus és a kijelentési kalkulus egyre, az osztályokra vonatkozó kalkulusra van visszavezetve. Ez utóbbi LEIBNIZ-czel az egész és rész vagy a tartalmazó és tartalmazott elméletének is nevezhető. Ámde, mint látni fogjuk, e két kalkulus mégis oly különbözőségeket is mutat, melyek megakadályozzák formális szempontból való tökéletes azonosításukat s így az egyedüli «osztálykalkulus»-ra való visszavezetést is. Ily módon a valóságban három különböző kalkulussal van dolgunk, illetőleg — közös részüket tekintve — ugyanazon kalkulus három különböző interpretácziójával. Az olvasónak még sem szabad elfelejteni, hogy a képletek logikai értéke és deduktiv lánczolata teljesen független az interpretácziótól. Ezen abstractio megkönnyitése czéljából az interpretáló mondatokat mindenkor «F. I.» *(fogalmi interpretáczió)* vagy «K. I.» *(kijelentésekre vonatkozó interpretáczió)* jellel fogjuk ellátni. Ezen interpretácziók csak arra fognak szolgálni, hogy a képleteket érthetőkké, világosakká tegyék, hogy intuitive evidensekké legyenek, de nem, hogy ezzel helyességüket bizonyitsuk. El is hagyhatjuk őket a nélkül, hogy ezzel ártanánk a rendszer logikai szigorúságának.

Hogy minden interpretácziótól függetlenek maradjunk, azt fogjuk mondani, hogy a betűk *tag*okat jelölnek: e tagok lehetnak majd fogalmak vagy kijelentések. A *tag* szót csakis logikai értelemben fogjuk használni. Egy összeg «tag»-jainak jelölésére az *összeadandó* szót fogjuk használni, hogy elkerüljük ez által e szó logikai és mathematikai értelmének összecserélését. Egy tag tehát ép úgy lehet majd tényező. mint összeadandó.

3. Az inclusio. A logika algebrája, mint minden deduktiv elmélet princzipiumok különböző rendszerére épithető fel.[1] Mi azt a rendszert választjuk, mely SCHRÖDER tárgyalását és a szokásos logikai interpretácziót leginkább megközeliti.

[1] L. HUNTIGTON: id. h., p. 288—309.

E kalkulus alapvonatkozása azon kettős (két tagot tartalmazó) vonatkozás, melyet osztályokra vonatkozólag *inclusió*nak, fogalmakra vonatkozólag *subsumptió*nak és kijelentésekre vonatkozólag *implikáczió*nak neveznek. Tárgyalásunkban az első szót fogadjuk el, minthogy az mindkét logikai interpretácziónál használható és e vonatkozás számára a $<$ jelt fogjuk használni, mert formális tulajdonságaiban analogiát mutat a mathematikai $<$ *(kisebb, mint)*, jobban mondva $\leqq$ vonatkozáshoz, különösen abban, hogy egyik sem szimmetrikus. Ezen analogia következtében SCHRÖDER e vonatkozást az összetett $\in$ jellel jelölte, melyet azonban nem fogadunk el, mivelhogy az inclusiónak nevezett vonatkozás egyszerű.

A mi princzipium rendszerünkben e fogalom alapfogalomnak, tehát *definiálhatatlan*nak vétetik. A következő magyarázatok nem is definiálására szolgálnak, hanem arra, hogy értelmét mindkét interpretáczióban megjelöljék.

F. I.: Az $a<b$ vonatkozás, hol a és b fogalmakat jelöl, azt jelenti, hogy az a fogalom a b fogalom alá tartozik, azaz faj a b nemre vonatkozólag. A fogalom «kör»-ének szempontjából az a jelentése, hogy az a-k osztálya bentfoglaltatik a b-k osztályában, vagyis egy részét alkotja; rövidebben: «minden a (egyszersmind) b. A «foglalat» szempontjából pedig azt jelenti, hogy a b fogalom bent van az a fogalomban, vagyis ennek részét alkotja és hogy ily módon az a jegy maga után vonja a b jegyet. Példa: «minden ember halandó», «ember implikálja halandót», «a ki embert mond, halandót mond»; vagy egyszerűen: «ember, tehát halandó».

K. I.: Ha a és b kijelentéseket jelöl, akkor $a<b$ azt jelenti, hogy az a kijelentés maga után vonja a b kijelentést, a mit gyakran a következő feltételes itélettel fejeznek ki: «Ha a igaz, b is igaz» vagy «a implikálja b-t» vagy egyszerűen: «a, tehát b». Látjuk tehát, hogy a $<$ vonatkozás mindkét interpretáczióban, megközelítőleg «*tehát*»-tal fordítható le.

Megjegyzés. Bármi is az a, b tagok interpretácziója, az «$a < b$» vonatkozás mindenkor kijelentés. Ha tehát egy $<$

vonatkozás egyik vagy mindkét oldala maga is ily vonatkozás, akkor csak a kijelentésekre vonatkozó interpretáczió adható neki, azaz csak implikácziót jelenthet.

Egy kijelentést *elsőrendűnek* neveznek, ha tagjai egyszerű tagok (betűk), *másodrendűnek*, ha tagjai elsőrendű kijelentések és így tovább.

Kitűnik innen, hogy a kijelentési interpretáczió homogénebb, mint a másik, mert csak ez adhatja a $<$ jelnek az első és másodrendű kijelentésekben ugyanazt az értelmet.

4. Az egyenlőség definicziója. Egy második vonatkozás, melynek jele $=$ *(egyenlő)*, már definiálható az első segítségével. E definiczió szerint akkor lesz

$$a = b,$$

ha egyidejűleg fennáll

$$a > b \quad \text{és} \quad b < a\,;$$

más szavakkal: az egyetlen «$a = b$» vonatkozás egyértékű az egyidejűleg fennálló «$a < b$», «$b < a$» vonatkozással.

Formális definicziójával a $=$ jel mindkét interpretáczióban meg van határozva:

F. I.: $a = b$ ezt jelenti: «minden a egyszersmind b és minden b egyszersmind a», másképp kifejezve: az a és b osztály összeesik, azonos.[1]

K. I.: $a = b$ jelentése: «a implikálja b-t és b implikálja a-t»; másképp kifejezve: a és b æquivalens, azaz egyidejűleg igaz vagy hamis.[2]

Megjegyzés. Az egyenlőségnek nevezett vonatkozás, definicziója szerint, symmetrikus: $a = b$ annyit jelent, mint $b = a$. Ámde az inclusió-vonatkozás nem symmetrikus: $a < b$ nem egyértékű $b < a$-val és nem implikálja az utóbbit. Megállapod-

---

[1] Ez nem jelenti azt, hogy az a és b fogalmaknak ugyanaz a jelentésük. Például: «háromszög» és «háromoldal», «egyenlőszögű háromszög» és «egyenlőoldalú háromszög».

[2] Ez még nem jelenti azt, hogy értelmük ugyanaz. Példa: «*ABC* háromszög két oldala egyenlő» és «*ABC* háromszög két szöge egyenlő».

hatnánk, hogy $a > b$ annyit jelentsen, mint $b < a$, de nagyobb világosság kedvéért mindenkor a $<$ jelt fogjuk használni. Mindazonáltal «$a < b$» egyszer «a bentfoglaltatik b-ben», másszor «b tartalmazza a-t» mondattal fordítható le.

Hogy az interpretácziótól függetlenek maradjunk, e vonatkozás első tagját *megelőző*nek, a másodikat *követő*nek fogjuk nevezni.

F. I.: Általános állító kijelentésnél a megelőző az alany, a követő az állítmány.

K. I.: A megelőző a præmissa vagy ok, a követő a következmény. Ha az implikácziót hypothetikus (vagy feltételes) itélettel fordítják le, akkor a megelőzőt hypothesisnek (feltételnek), a követőt thesisnek nevezik.

Egyenlőségeket többnyire úgy fogunk bizonyitani, hogy felbontjuk őket két egymáshoz inverz inclusióra és ezeket egyenkint bebizonyitjuk. Ha az egyenlőség adva van (præmissa), akkor is gyakran alkalmazzák ezt a felbontást.

Ha egy egyenlőség mindkét tagja kijelentés, akkor két implikáczióra bomlik. Ha ezek egyike *tétel*, akkor a másik ennek *recziprok*ja. Valahányszor tehát egy tétel recziprokja igaz, egy egyenlőség irható fel. Egyszerű tétel oly implikáczióra ad alkalmat, melynek megelőzője a tétel *hypothesise* és követője a tétel *thesise*.

Gyakran azt mondják, hogy a hypothesis a thesis *elegendő feltétele* és a thesis a hypothesis *szükséges feltétele:* valóban ahhoz, hogy a thesis igaz legyen elég, hogy a hypothesis igaz; míg a thesisnek igaznak *kell* lenni, hogy a hypothesis is igaz legyen. Ha egy tétel recziprokja igaz, akkor hypothesise a thesis szükséges és elegendő feltétele, azaz oka és következménye egyidejűleg.

5. Az azonosság princzipiuma. A logika algebrájának első princzipiuma vagy axiomája az azonosság princzipiuma, mely így fogalmazható. Bármi is az a tag, mindenkor

$$a < a. \qquad (I)$$

F. I.: «Minden a: a», azaz egy tetszőleges osztály tartalmazza önmagát».

K. I.: «a-ból következik: a», azaz egy tetszőleges kijelentés maga után vonja önmagát.

Ez az azonosság elvének egyszerű képlete; az egyenlőség definicziója segítségével egy más képlet vezethető le belőle, melyet tévesen gyakran ezen elv kifejezőjének tekintenek: bármi is az a, mindenkor

$$a = a.$$

F. I.: Az a osztály azonos önmagával.

K. I.: Az a kijelentés egyenlő értékű önmagával.

6. A syllogismus princzipiuma. A logika algebrájának egy második princzipiuma a syllogismus princzipiuma, mely így formulázható:

$$(a<b)(b<c)<(a<c). \qquad \text{(II)}$$

F. I.: «Ha az a-k mind b-k, a b-k mind c-k, akkor az a-k mind c-k». Ez a kategorikus syllogismus elve.

K. I.: «Ha a maga után vonja b-t, b pedig c-t, akkor a maga után vonja c-t.» Ez a hypothetikus syllogismus elve.

Látjuk, hogy a fő $<$-jel mindig implikácziót jelent, mivelhogy másodrendű kijelentéssel van dolgunk.

Az egyenlőség definicziója szerint a syllogismus elvéből a következő képletek folynak:[1]

$$(a<b)(b=c)<(a<c),$$
$$(a=b)(b<c)<(a<c),$$
$$(a=b)(b=c)<(a=c).$$

Csak az esetben egyenlőség a conclusio, ha mindkét præmissa egyenlőség.

[1] Szigorúan véve e törvények feltételezik a szorzás törvényeit, melyeket csak később fogunk kifejteni, de már itt, a syllogismus elvénél fel kellett őket emlitenünk, mivelhogy ezen elvnek a folyományai.

E képletek a következőkép általánosíthatók:

$$(a<b)(b<c)(c<d)<(a<d),$$
$$(a=b)(b=c)(c=d)<(a=d).$$

Ez a deduktiv lánczolatoknak két főképlete, de sok más hasonló kombináczió is képzelhető. De csak akkor lesz egyenlőség a conclusio, ha valamennyi præmissa egyenlőség. Ezen megjegyzésnek nagy gyakorlati fontossága van. Egy deduktiv sorozat esetén jól meg kell figyelni azt, hogy az átmenet egyik kijelentésről a másikra æquivalentia vagy csak implikáczió folytán történt. A két szélső kijelentés csak akkor æquivalens, ha minden közbülső dedukczió æquivalentia; ellenkező esetben, ha csak egyetlen egy implikáczió van is a sorozatban, a szélső kijelentések közt fennálló vonatkozás csupán csak implikáczió.

7. Szorzás és összeadás. A logika algebrájában három művelet szerepel: a logikai *szorzás*, a logikai *összeadás* és a *tagadás*. Az első kettő kettős művelet, azaz *két* tag kombinácziója, mely eredményül egy harmadik tagot ad (ez megegyezik vagy különbözik az első kettőtől). A logikai *szorzat* és *összeg* létezése szükségszerűleg egy kettős postulatum tárgyát képezi, mert nem elég egy tetszőleges lényt definiálni, hogy az létezzék. E két postulatum a következő módon fogalmazható:

III. Adva lévén két tetszőleges tag, a és b, létezik oly p tag, hogy

$$p<a, \quad p<b$$

és bármily oly tag is az x, melyre nézve

$$x<a, \quad x<b,$$

egyszersmind

$$x<p.$$

IV. Adva lévén két tetszőleges tag, a és b, létezik oly s tag, hogy

$$a<s, \quad b<s$$

l y oly tag is az x, melyre nézve

$$a<x,\quad b<x,$$

egyszersmind

$$s<x.$$

Könnyen kimutatható, hogy ezen feltételekkel p és s egyértelműen van meghatározva úgy, hogy az ab szorzat és az $a+b$ összeg mint a p, illetve s tag definiálható.

F. I.: 1°. Két osztály szorzata oly osztály, mely benfoglaltatik mindkét osztályban és a mely minden oly osztályt tartalmaz, mely mindkét osztályban bentfoglaltatik.

2°. Két osztály összege oly osztály, mely mindkét osztályt tartalmazza és a mely bentfoglaltatik minden oly osztályban, mely mindkét osztályt tartalmazza.

Metaphorikus értelemben használva a *kisebb, nagyobb* szavakat (a mire a $<$ vonatkozás és a mathematikai egyenlőtlenség közti analógia csábít), ez így fejezhető ki: Két osztály szorzata a mindkettőben tartalmazott osztályok legnagyobbika; két osztály összege a mindkettőt tartalmazó osztályok legkisebbike.[1] Következésképen két osztály szorzata: a közös részük (közös elemeik összessége); összege: azon elemek összessége. melyek legalább is egyiknek elemei.

K. I.: 1°. Két kijelentés szorzata oly kijelentés, mely mindkettőt implikálja és a melyet minden oly kijelentés implikál, mely mindkettőt implikálja.

2°. Két kijelentés összege oly kijelentés, melyet mindkét kijelentés implikál és a mely minden oly kijelentést implikál, melyet mindkettő implikál.

Ezek szerint két kijelentés szorzata leggyengébb közös okuk,

[1] Más analógia következtében DEDEKIND a logikai összeg és szorzat számára ugyanazt a jelt használta, mint a legkisebb közös többszörös és a legnagyobb közös osztó számára, t. i. az $\mathfrak{M}(a, b)$ és $\mathfrak{G}(a, b)$ jelt (*Was sind und was sollen die Zahlen*, 8. és 17. pont, 1887). Ugyanezen elnevezéseket használta eredetileg GEORG CANTOR is (*Mathematische Annalen*, XVII. k., 1880).

összegük pedig legerősebb következményük úgy általánosítva a gyönge és erős szavak értelmét, hogy: minden kijelentés, mely egy másikat implikál, ennél erősebb, ez pedig gyengébb amannál. Könnyen meggyőződünk, hogy két kijelentés szorzata *egyidejű (simultán) állításukban* (igaznak való kijelentésükben) áll: «*a* és *b* igaz» vagy egyszerűen «*a* és *b*»; az összeg pedig *vagylagos (alternativ) állítást* jelent: «*a* vagy *b* igaz» vagy egyszerűen: «*a* vagy *b*».

Megjegyzés. A logikai összeadás definicziónk szerint: nem disjunctiv, azaz nem feltételezi, hogy a két összeadandónak nincs közös eleme.

8. Az egyszerűsítés és összetevés elvei. A most adott két definiczióból, vagy jobban mondva, az ezeket megelőző két postulatumból, a mely a definiczióknak jogosultságot ád, közvetlenül a következő képletek folynak:

$$ab < a, \quad ab < b, \qquad (1)$$

$$(x < a)(x < b) < (x < ab), \qquad (2)$$

$$a < a + b, \quad b < a + b, \qquad (3)$$

$$(a < x)(b < x) < (a + b < x) \qquad (4)$$

(1)-et és (3)-at *egyszerűsítési elv*nek nevezik; segítségükkel valóban egyszerűsiteni lehet egy okoskodás præmissáit, azáltal t. i., hogy e præmissákból gyengébb kijelentéseket vezetünk le; akár úgy, hogy egy szorzatból egyik tényezőjét, akár úgy, hogy egy kijelentésből egy oly alternativ összeget vezetünk le, melynek e kijelentés egyik összeadandója.

(2)-t és (4)-et *összetevési elv*nek nevezik, mert segítségükkel egyesíteni lehet két oly inclusiót, melyeknek megelőzője vagy követője ugyanaz. Az első esetben össze kell szorozni a két követőt, a másodikban össze kell adni a két megelőzőt.

A syllogismus és az egyszerűsítés elvének segítségével az összetevési elv képletei egyenlőségekké alakíthatók át. Valóban:

1°. (Syll.) $(x < ab)(ab < a) < (x < a)$,

(Syll.) $(x < ab)(ab < b) < (x < b)$,

tehát

(Összet.) $(x<ab)<(x<a)(x<b)$.

2°. (Syll.) $(a<a+b)(a+b<x)<(a<x)$,

(Syll.) $(b<a+b)(a+b<x)<(b<x)$,

tehát

(Összet.) $(a+b<x)<(a<x)(b<x)$.

Ha a nyert két formulát összevetjük a megelőző kettővel, mely épen e két kijelentés inverz kijelentése, eredményünk így írható:

$$(x<ab)=(x<a)(x<b),$$
$$(a+b<x)=(a<x)(b<x).$$

A helyett tehát, hogy x bent van ab-ben, az mondható, hogy bent van a-ban is, b-ben is; a helyett pedig, hogy x tartalmazza $a+b$-t az mondható, hogy a-t is, b-t is tartalmazza.

9. A tautologia és absorptio törvénye. Minthogy a logikai összeadás és szorzás definicziójában a tagok sorrendje egyáltalán nem szerepel, azért mindkét műveletnek megvan az associativ és commutativ tulajdonsága, melyeket a következő formulák fejeznek ki:

$$ab=ba, \qquad a+b=b+a,$$
$$(ab)c=a(bc), \qquad (a+b)+c=a+(b+c).$$

Még egy speciális tulajdonságuk van e műveleteknek, a melyet a *tautologia törvénye* fejez ki:

$$a=aa \quad | \quad a=a+a.$$

Bizonyítás:

1°. (Egyszerűsítés) $aa<a$,

(Összet.) $(a<a)(a<a)=a<aa$

és innen az egyenlőség defincziója szerint:

$$(aa<a)(a<aa)=(a=aa).$$

Ép így:

2°. (Egysz.) $a<a+a$,

(Összet.) $(a<a)(a<a)=(a+a<a)$,

honnan

$$(a < a+a)(a+a < a) = (a = a+a).$$

E törvény szerint akárhány egyenlő (azonos) tag összege vagy szorzata egyenlő e taggal. A logika algebrájában nincsen tehát se többszörös, se hatvány, a mi a numerikus algebrához viszonyítva igen nagy egyszerűsítés.

Végül még egy fontos tulajdonsága van a logikai összeadásnak és szorzásnak, mely különösen a kalkulus egyszerűsítésére szolgál. Ezt az *absorptio törvénye* fejezi ki:

$$a+ab=a, \quad | \quad a(a+b)=a.$$

Bizonyítás:

1°. (Összet.) $(a < a)(ab < a) < (a+ab < a)$,

(Egysz.) $a < a+ab$

és innen az egyenlőség definicziója szerint:

$$(a+ab < a)(a < a+ab) = (a+ab = a).$$

Ép így:

2°. (Összet.) $(a < a)(a < a+b) < [a < a(a+b)]$,

(Egysz.) $a(a+b) < a$,

a honnan

$$[a < a(a+b)][a(a+b) < a] = [a(a+b) = a].$$

Az a tag tehát *absorbeálja* az ab összeadandót, melynek egyik tényezője és az $a+b$ tényezőt, melynek egyik összeadandója.

10. Összeadási és szorzási tételek. Most két tételt akarunk kimutatni, mely inclusióknak és egyenlőségeknek összeadás és szorzás által való összetevésére vonatkozik.

(I. tétel) $(a < b) < (ac < bc)$, | $(a < b) < (a+c < b+c)$.

Bizonyítás:

1°. (Egysz.) $ac < c$,

(Syll.) $(ac < a)(a < b) < (ac < b)$,

(Összet.) $(ac < b)(ac < c) < (ac < bc)$.

2°. (Egysz.) $c < b+c$,

(Syll.) $(a<b)(b<b+c)<(a<b+c)$,

(Összet.) $(a<b+c)(c<b+c)<(a+c<b+c)$.

E tétel könnyen kiterjeszthető az egyenlőség esetére is:

$$(a=b)<(ac=bc), \quad | \quad (a=b)<(a+c=b+c).$$

(II. tétel) $(a<b)(c<d)<(ac<bd)$,

$(a<b)(c<d)<(a+c<b+d)$.

Bizonyítás:

1°. (Syll.) $(ac<a)(a<b)<(ac<b)$,

(Syll.) $(ac<c)(c<d)<(ac<d)$,

(Összet.) $(ac<b)(ac<d)<(ac<bd)$.

2°. (Syll.) $(a<b)(b<b+d)<(a<b+d)$,

(Syll.) $(c<d)(d<b+d)<(c<b+d)$,

(Összet.) $(a<b+d)(c<b+d)<(a+c<b+d)$.

E tétel könnyen kiterjeszthető arra az esetre, midőn az egyik inclusio helyébe egyenlőség lép:

$$(a=b)(c<d)<(ac<bd),$$
$$(a=b)(c<d)<(a+c<b+d).$$

Ha mindkét inclusio helyébe egyenlőség lép, akkor az eredmény is egyenlőség lesz:

$$(a=b)(c=d)<(ac=bd),$$
$$(a=b)(c=d)<(a+c=b+d).$$

Összefoglalva eredményünket: két (vagy több) inclusio vagy egyenlőség összeadható vagy összeszorozható; az eredmény csak akkor lesz egyenlőség, ha az összetett kijelentések mindegyike egyenlőség.

11. Inclusiót egyenlőséggé átalakító első képlet. Fontos képletet mutathatunk most ki, melynek segítségével inclusio egyenlőséggé alakítható át és viszont:

$$(a<b)=(a=ab), \quad (a<b)=(a+b=b).$$

Bizonyítás:

1°. $(a<b)<(a=ab)$, $(a<b)<(a+b=b)$.

Valóban:

(Összet.) $(a<a)(a<b)<(a<ab)$,

$(a<b)(b<b)<(a+b<b)$;

másrészt pedig:

(Egysz.) $ab<a$, $b<a+b$,

(= def.) $(a<ab)(ab<a)=(a=ab)$.

$(a+b<b)(b<a+b)=(a+b=b)$;

2°. $(a=ab)<(a<b)$, $(a+b=b)<(a=b)$.

Valóban:

$(a=ab)(ab<b)<(a<b)$,

$(a<a+b)(a+b=b)<(a<b)$.

Megjegyzés. Ha az egyenlőséget (nem definiált) alapfogalomnak vennők, akkor az inclusio-vonatkozás a megelőző két képlet egyikével volna definiálható.[1] A syllogismus elve akkor bizonyítható volna.[2]

A megelőző képleteknek egy érdekes folyományuk van:

$$(a=b)=(ab=a+b).$$

---

[1] L. HUNTIGTON, id. h., 1. §.

[2] Ime e bizonyítás. A definiczió szerint:

$$(a<b)=(a=ab),$$
$$(b<c)=(b=bc).$$

Helyettesitsük b helyébe az első egyenlőségben a másodikból nyert értékét:

$$a=abc.$$

a helyébe a vele egyenlő ab-t téve:

$$ab=abc.$$

Ezen egyenlőség egyértékű a következő inclusióval:

$$ab<c$$

és a-val pótolva ab-t, végül:

$$a<c. \qquad Q. E. D.$$

Valóban:

1°. $$(a=b)=(a<b)(b<a),$$

$$(a<b)=(a=ab), \quad (b<a)=(a+b=a),$$

(Syll.) $$(a=ab)(a+b=a)<(ab=a+b).$$

2°. $$(ab=a+b)<(a+b<ab),$$

(Összet.) $$(a+b<ab)=(a<ab)(b<ab),$$

$$(a<ab)(ab<a)=(a=ab)=(a<b),$$

$$(b<ab)(ab<b)=(b=ab)=(b<a).$$

Tehát:

$$(ab=a+b)<(a<b)(b<a)=(a=b).$$

12. A distributiv törvény. Eddigi principiumaink segítségével az *inverz distributiv törvény* mind az összeadásra, mind a szorzásra vonatkozólag bebizonyítható:

$$ac+bc<(a+b)c, \quad ab+c<(a+c)(b+c).$$

Bizonyítás:

1°. $$(a<a+b)<[ac<(a+b)c],$$
$$(b<a+b)<[bc<(a+b)c];$$

és innen összetevés útján:

$$[ac<(a+b)c][bc<(a+b)c]<[ac+bc<(a+b)c].$$

2°. $$(ab<a)<(ab+c<a+c),$$
$$(ab<b)<(ab+c<b+c),$$

és innen összetevés útján:

$$(ab+c<a+c)(ab+c<b+c)<[ab+c<(a+c)(b+c)].$$

A *direkt distributiv törvény:*

$$(a+b)c<ac+bc, \quad (a+c)(b+c)<ab+c$$

ugyanezen principiumokból nem bizonyítható be s így postulálnunk kell e két képlet egyikét vagy bármely egyszerűbb képletet, melynek ezek folyományai. Legkényelmesebb az

(V) $$(a+b)c < ac+bc$$

képletet postulálni.

Egybevetve ezt az inverz képlettel az

$$(a+b)c = ac+bc$$

egyenlőséget nyerjük, melyet egyszerűen *distributiv törvény*nek fogunk nevezni.

Innen közvetlenül levezethető a következő képlet:

$$(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd,$$

és így a distributiv törvény második képlete is:

$$(a+c)(b+c) = ab+c,$$

t. i.

$$(a+c)(b+c) = ab+ac+bc+c$$

és az absorptio törvénye szerint

$$ac+bc+c = c.$$

E második képlet maga után vonja az

$$(a+c)(b+c) < ab+c$$

inclusiót, melyet tehát ily módon bebizonyítottunk.

Következmény. Fennáll a következő egyenlőség:

$$ab+ac+bc = (a+b)(a+c)(b+c).$$

Valóban:

$$(a+b)(a+c)(b+c) = (a+bc)(b+c) = ab+ac+bc.$$

Megjegyezzük még, hogy a bebizonyított egyenlőség két oldala csak a szorzás és összeadás jelének sorrendjében különbözik. (V. ö. 14. p.)

13. A 0 és 1 definicziója. Két speczialis tagot vezetünk be most a logikai kalkulusba, melyeket az arithmetika nullájával és egységével mutatkozó analógiák folytán a 0 és 1 jelekkel fogunk jelölni. A két tagot formálisan a következő két principium definiálja, melyek existencziájukat postulálják:

VI. Létezik oly 0 tag, hogy bármi is az x tag, mindenkor

$$0 < x.$$

VII. Létezik oly 1 tag, hogy bármi is az x tag, mindenkor

$$x < 1.$$

Kimutatható, hogy mindkét tag ily módon egyértelműleg van definiálva, azaz, hogy ha egy második tagnak szintén megvan e tulajdonsága, akkor egyenlő (azonos) az elsővel.

E tagok két interpretácziója alkalmat ad bizonyos paradoxonokra, melyeket itt nem oszlatunk el, melyeket azonban az elmélet további fejlődése igazolni fog.

F. I.: 0 azt az osztályt jelöli, mely minden osztályban bentfoglaltatik; ez tehát a *nulla-* vagy *üres* osztály, mely egy elemet sem tartalmaz (a *Semmiség*). 1 azt az osztályt jelöli, mely minden osztályt tartalmaz; ez tehát az egyáltalán tartalmazott elemek összessége. BOOLE után a *tárgyalás universumának* vagy a *Mindenségnek* nevezik.

K. I.: 0 azt a kijelentést jelöli, mely minden kijelentést maga után von, ez tehát a *Hamisság* vagy *absurdum*, (mert többek közt minden egymásnak ellentmondó kijelentéspárt is maga után von). 1 azt a kijelentést jelöli, melyet minden kijelentés maga után von: ez tehát az *Igazság* (mert hamis állítás igazat is vonhat maga után, igaz azonban csakis igazat).

A definiczióból a következő inclusiók folynak:

$$0 < 0, \quad 0 < 1, \quad 1 < 1,$$

ezek közül az első és harmadik egyébként az azonosság elvéből is folyik. Fontosabb a második:

F. I.: A nulla-osztály bent foglaltatik a mindenségben.[1]

K. I.: A hamis (kijelentés) maga után vonja az igazat. A 0 és 1 definicziójából kifolyólag:

$$(a < 0) = (a = 0), \quad (1 < a) = (a = 1),$$

[1] Nem pedig: «a semmiség: mindenség»

mivelhogy másrészt minden a-ra

$$0<a, \quad a<1.$$

Az összetevés elvéből kifolyólag tehát:

$$(a=0)(b=0)=(a+b=0),$$
$$(a=1)(b=1)=(ab=1).$$

Azaz, ha két egyenlőség jobb oldala 0, összetehetők a bal oldalak összeadása által, ha pedig mindkét jobb oldal 1, akkor a bal oldaluk összeszorzása által tehetők össze.

Fordítva: hogy egy összeg nulla, annyit jelent, hogy minden összeadandója 0; az pedig, hogy egy szorzat 1-gyel egyenlő, annyit mond, hogy minden tényezője egyenlő 1-gyel.

Érvényes továbbá:

$$(a+b=0)<(a=0),$$
$$(ab=1)<(a=1)$$

és általánosabban (a syllogismus elvének következtében)

$$(a<b)(b=0)<(a=0),$$
$$(a<b)(a=1)<(b=1).$$

Megjegyezzük, hogy az $ab=0$ és $a+b=1$ egyenlőségekből mindeddig semmit sem következtethetünk. Valóban, a F. I.-ban az előbbi annyit jelent, hogy az a és b osztály közös része 0; ebből egyáltalán nem következik, hogy az a vagy b osztály maga is 0 volna; az utóbbi pedig azt jelenti, hogy e két osztály együtt a mindenséget alkotja, de azért még nem kell egyiküknek a mindenséggel azonosnak lenni.

Kimutatjuk most a következő képleteket, melyek a 0-val és 1-gyel való kalkulus szabályait adják:

$$a\times 0=0, \quad a+1=1,$$
$$a+0=a, \quad a\times 1=a.$$

Valóban:

$$(0<a)=(0=0\times a)=(a+0=a),$$
$$(a<1)=(a=a\times 1)=(a+1=1).$$

Tehát 0-t adni valamely taghoz, vagy 1-gyel szorozni, annyit jelent, mint változatlanul hagyni. Ezt úgy is fejezik ki, hogy 0 az összeadása *modulusa* és 1 a szorzás *modulusa*. Ellenben bármely tag 0-val való szorzata 0 és bármely tagnak és 1-nek az összege 1.

Az utóbbi képletek megfelelnek e két tag interpretácziójának:

F. I.: Egy tetszőleges osztálynak és a 0 osztálynak közös része a 0 osztály; egy tetszőleges osztálynak és a mindenségnek összege a mindenség. A 0 osztálynak és egy tetszőleges osztálynak összege egyenlő ez utóbbival; a mindenségnek és egy tetszőleges osztálynak közös része egyenlő az utóbbival.

K. I.: Egy tetszőleges kijelentésnek és egy hamis kijelentésnek egyidejű állítása egyenlő értékű az utóbbival (hamis), míg vagylagos állításuk az előbbivel egyenlő értékű. Egy tetszőleges kijelentésnek és egy igaz kijelentésnek egyidejű állítása egyenlő értékű az előbbivel, míg vagylagos állításuk az utóbbival egyenlő értékű (igaz).

Megjegyzés. Ha utolsó négy képletünket axiomaként fogadnók el (hiszen mindkét interpretáczió evidensekké teszi őket), akkor a régebben nyert

$$(a=ab)=(a<b)=(a+b=b)$$

képlet segítségével levezethetnők a

$$0<x, \quad x<1$$

képleteket.

14. A dualitás törvénye. A szorzásra vonatkozó képletek és az összeadásra vonatkozó képletek közt teljes symmetriát konstatálhattunk. Áttérhetünk egyik csoportból a másikra az által, hogy az összeadás jelét és a szorzás jelét mindenütt felcseréljük; de ezzel egyidejűleg 0 és 1 is mindenütt felcserélendő és a $<$ jel iránya is megváltoztatandó (ez utóbbi helyett felcserélhetjük az implikáczió két oldalát). Mivelhogy ezen symmetria, vagy mint mondják, *dualitás* fennáll az elvekben és definicziókban, minden levezetett képletben is fenn kell állania, a míg csak nem vezetünk be a dualitásnak meg nem felelő elvet vagy definicziót. Valamely igaz képletből ily módon a dualitás szerint átalakítva ezt, vagyis alkalmazva a fenti szabályt, új igaz képlethez juthatunk. Ez *a dualitás törvénye,* a mely — és ez épen a praktikus haszna — két bizonyítás közül az egyiket fölöslegessé teszi. Szükségesnek tartjuk megemlíteni, hogy e törvény magának a szorzásnak és összeadásnak definicziójából következik, nem pedig, mint gyakran hiszik, a tagadás törvényeiből, melyeket hiszen még meg se említettünk. Mint látni fogjuk, e törvényeknek szintén megvan e tulajdonságuk s így megőrzik a dualitást, de nem alapítják ezt meg: a dualitás akkor is léteznék, ha be se vezetnők a tagadás fogalmát. Így például az

$$ab+ac+bc=(a+b)(a+c)(b+c)$$

egyenlőség (l. 12. p.) a dualitás által önmagának felel meg, mert a dualitás a bal oldalt a jobb oldalba és a jobbot a balba alakítja át.

Még kell még jegyeznünk, hogy a dualitás törvénye csak *elsőrendű* kijelentésekre alkalmazható, azaz olyanokra, melyek csak egy $<$ vagy $=$ jelt tartalmaznak. *Másodrendű* kijelentésnek pedig az olyat nevezik, melynek mindkét ($<$ vagy $=$ jellel egybekapcsolt) oldala elsőrendű kijelentés stb. Például az azonosság elve, az egyszerűsítés elve elsőrendű kijelentés, míg a syllogismus vagy összetevés elve másodrendű.

15. A tagadás definiciója. A 0 és 1 tagok bevezetése lehetővé teszi a *tagadás* definiczióját: ez a művelet *egy* tagot átvisz egy másikba, melyet *tagadásának* nevezünk.[1] Az a tagadását «non-a»-nak mondjuk és a'-vel jelöljük.[2] Formális definicziója feltételezi a következő existenczia-postulatumot:

---

[1] Ez kétértelmű, mert a műveletet és eredményét ugyanaz a szó jelöli. Helyesebb volna az eredményt más szóval jelölni, például így: «*a* negativuma». Más szerzők a *supplementum* szót használják, míg a klasszikus logika (különösen kijelentések esetében) az *ellentét* (contradictorius) kifejezést használta.

[2] Ebben MAC COLL jelölését fogadjuk el; SCHRÖDER a_1-gyel jelölte non-a-t, a mi lehetetlenné teszi indexek használatát és felső indexek hasz-

VIII. Bármi is az a tag, létezik oly a' tag, hogy egyidejűleg

$$aa'=0, \quad a+a'=1.$$

A következő segédtétel segítségével kimutatható, hogy ha az így definiált tag létezik, akkor egyértelműen van meghatározva.

Ha egyidejűleg

$$ac=bc, \quad a+c=b+c,$$

akkor egyszersmind

$$a=b.$$

Bizonyítás. a-val, majd b-vel szorozva a második præmissa két oldalát:

$$a+ac=ab+ac,$$
$$ab+bc=b+bc,$$

Az első præmissa szerint pedig:

$$ab+ac=ab+bc,$$

és így

$$a+ac=b+bc;$$

ez az absorptio törvénye szerint valóban

$$a=b$$

-re redukálódik.

Megjegyzés. E bizonyítás a direkt distributiv törvényen alapszik s így ez utóbbi circulus vitiosus nélkül nem bizonyítható be a tagadás segítségével sem, legalább is a mi rendszerünkben (az elfogadott elvek alapján) nem.

Bebizonyítván e segédtételt, tegyük most már fel, hogy valamely a tagnak két tagadása van: a'_1 és a'_2, azaz, hogy a'_1 is, a'_2 is kielégíti a definiczió mindkét feltételét. Kimutatjuk, hogy e két tag egyenlő. Valóban, minthogy feltevés szerint

---

nálatára kényszerít. Az a' jelölésnek épen az az előnye, hogy nem zárja ki sem az alsó, sem a felső indexek használatát. A több szerzőtől használt $\bar{a}$ jelölés typographikus szempontból alkalmatlan. Ha a tagadás ($<$ vagy $=$ jellel) explicite kiírt kijelentésekre vonatkozik, ezt a $<$ vagy $=$ jelen jelöljük, oly módon, hogy függélyesen áthúzzuk ($\not<$, $\neq$). A felső indexként írt vonás úgy is felfogható, hogy az illető betű függélyes áthúzását pótolja.

$$aa'_1=0, \quad a+a'_1=1,$$
$$aa'_2=0, \quad a+a'_2=1,$$

azért

$$aa'_1=aa'_2, \quad a+a'_1=a+a'_2$$

s így a segédtétel szerint:

$$a'_1=a'_2.$$

Most már tehát valamely tagnak a tagadásáról, mint egyértelműleg meghatározott tagról szólhatunk.

A tagadás műveletének egyértelműsége így is kifejezhető: Ha $a=b$, akkor egyszersmind

$$a'=b'.$$

A kalkulusban e szerint valamely egyenlőség két oldala tagadásukkal helyettesíthető.

16. Az ellentmondás és a kizárt harmadik elve. A definiczió szerint valamely tag és tagadása kielégíti e két képletet:

$$aa'=0, \quad a+a'=1,$$

melyek az ellentmondás elvét és a kizárt harmadik elvét fejezi ki.[1]

F. I.: 1°. Az a és a' osztályoknak nincs közös részük; másképp kifejezve: semmiféle elem nem lehet egyszerre a és non-a.

2°. Az a és a' osztály együtt a mindenséget alkotja; másképen kifejezve: minden elem vagy a, vagy non-a.

K. I.: 1°. Az a és non-a kijelentések egyidejű állítása hamis, azaz e két kijelentés nem lehet egyszerre igaz.

---

[1] Mint Mrs. LADD-FRANKLIN helyesen megjegyezte (BALDWIN «Dictionary of Philosophy and Psychologie»-jének «Laws of Thought» cz. czikkében) az *ellentmondás* elve nem elég *ellentmondó* tagok definiálására. Ehhez még a kizárt harmadik elve is szükséges, melyet ép úgy lehetne az ellentmondás elvének nevezni, mint az elsőt. Ezért Mrs. LADD-FRANKLIN a «*kizárás (exclusio) elve*» és «*kimerítés (exhaustio) elve*» elnevezéseket ajánlja: az első szerint két egymásnak ellentmondó tag *kizárja* egymást, az utóbbi szerint két ily tag *kimeríti* a mindenséget.

2°. Az a és non-a kijelentések vagylagos állítása igaz, azaz e két kijelentés egyike mindenesetre igaz.

Két kijelentést *ellentmondó*nak neveznek, ha egyik a másik tagadása; sem igaz, sem hamis mindkettő egyszerre nem lehet. Ha az egyik igaz, a másik hamis, ha az egyik hamis, a másik igaz. Ez megfelel annak, hogy a 0 és 1 tagok egymás tagadásai; valóban

$$0 \times 1 = 0, \quad 0 + 1 = 1.$$

Általában két tagot *ellentmondó*nak fogunk nevezni, ha egyik a másik tagadása.

17. A kettős tagadás törvénye. Általánosan érvényes a következő recziproczitás: ha a b tag az a tag tagadása, akkor egyszersmind az a tag a b tag tagadása. Valóban mindkét tényt ugyanazon képletek:

$$ab = 0, \quad a + b = 1$$

fejezik ki. A mint b, mint a függvénye egyértelműen van e képletekkel meghatározva, ép úgy a is, mint b függvénye egyértelműen van meghatározva. E tulajdonság a vonatkozások symmetriájában, azaz a szorzás és összeadás commutativ voltában rejlik. Ezt a recziproczitást a *kettős tagadás törvénye*:

$$(a')' = a$$

fejezi ki, mely formálisan a következőképen bizonyítható be. A feltevés szerint a' az a tagadása, tehát

$$aa' = 0, \quad a + a' = 1.$$

Másrészt legyen a'' az a' tagadása, akkor ép úgy

$$a'a'' = 0, \quad a' + a'' = 1.$$

Segédtételünk szerint e négy egyenlőségből

$$a = a''$$

következik és ez az, a mit ki akartunk mutatni.

E törvény így is kifejezhető:

Ha $b=a'$, akkor egyszersmind $a=b'$ és (a symmetria folytán) viszont. A kalkulusban e szerint a tagadás átvihető egy egyenlőség egyik oldaláról a másikra.

A kettős tagadás törvénye szerint továbbá két tag egyenlőségére következtethetünk, ha tagadásuk egyenlő.

Ha $a'=b'$, akkor egyszersmind $a=b$, azaz egy egyenlőség mindkét oldaláról egyidejűleg elhagyható a tagadás.

A tagadásra vonatkozó főképleteknek és a 0 és 1 alaptulajdonságainak következménye, hogy minden szorzat, mely két ellentmondó tényezőt tartalmaz, 0 és minden összeg, mely két ellentmondó összeadandót tartalmaz, egyenlő 1-gyel.

Nevezetesen a következő képletek érvényesek:

$$a=ab+ab', \quad a=(a+b)(a+b'),$$

melyek a distributiv törvény alapján így mutathatók ki:

$$a=a\times 1=a(b+b')=ab+ab',$$
$$a=a+0=a+bb'=(a+b)(a+b').$$

E képletek alapjául szolgálnak azon kifejtési módszernek, melyet később fogunk tárgyalni (a 21. és további pontokban).

18. Inclusiót egyenlőséggé átalakító második képlet. Két igen fontos, inclusio és egyenlőség közt fennálló æquivalencziát állíthatunk most fel:

$$(a<b)=(ab'=0), \quad (a<b)=(a'+b=1).$$

Bizonyítás. 1°. b'-vel szorozva az $a<b$ inclusio két oldalát:

$$(ab'<bb')=(ab'<0)=(ab'=0).$$

2°. Viszont tudjuk, hogy

$$a=ab+ab'.$$

De $ab'=0$ és így

$$a=ab+0=ab.$$

Másrészt: 1°. a'-t adva az $a<b$ inclusio két oldalához:

$$(a'+a<a'+b)=(1<a'+b)=(a'+b=1).$$

2°. Tudjuk, hogy

$$b=(a+b)(a'+b).$$

De $a'+b=1$ és így

$$b=(a+b)\times 1=a+b.$$

A bebizonyított képletek alapján minden inclusio oly egyenlőséggé alakítható át, melynek jobb oldala tetszés szerint 0 vagy 1. Ugyanily alakra hozható egy tetszőleges egyenlőség is, a következő képletek segítségével:

$$(a=b)=(ab'+a'b=0), \quad (a=b)=[(a+b')(a'+b)=1].$$

Bizonyítás:

$$(a=b)=(a<b)(b<a)=(ab'=0)(a'b=0)=(ab'+a'b=0),$$
$$(a=b)=(a<b)(b<a)=(a'+b=1)(a+b'=1)=[(a+b')(a'+b)=1].$$

Elvégezve a kijelölt szorzást (illetve összeadást) a distributiv törvény alapján, innen még a következő két képlet folyik:

$$(a=b)=[(a+b)(a'+b')=0], \quad (a=b)=(ab+a'b'=1).$$

19. A contrapositio törvénye. Kimutathatjuk most a contrapositio törvényét:

$$(a<b)=(b'<a').$$

Bizonyítás. A megelőző képletek alapján

$$(a<b)=(ab'=0)=(b'<a').$$

E törvény még a következő alakban írható:

$$(a<b')=(b<a'),$$

mely alak feltételezi a kettős tagadás törvényét. Szavakba foglalva: «Valamely inclusio két oldala felcserélhető, ha egyidejűleg a két oldalt tagadásukkal pótoljuk».

F. I.: Ha minden a egyszersmind b, akkor minden non-b egyszersmind non-a, és viszont.

K. I.: Ha a maga után vonja b-t, akkor non-b maga után vonja non a-t. Másként kifejezve: «Ha a igaz, b is igaz» ugyanannyit mond, mint: «Ha b hamis, a is hamis».

E két kijelentés æquivalencziája az alapja a «deductio ad absurdum»-mal való bizonyitásnak. (Lásd a *modus tollens* hypothetikus okoskodást, 58. pont.)

20. Az existenczia-postulatum. Még egy utolsó axiomát kell emlitenünk, melyet *existenczia-postulatum*nak fogunk nevezni:

IX. $$1 \nless 0,$$

a honnan azonnal

$$1 \neq 0$$

következik.

A F. I.-ban ez annyit jelent, hogy a mindenség nem nulla, azaz, hogy tartalmaz legalább egy elemet. Ha csak egy elemet tartalmaz, csak két lehetséges osztály van: 1 és 0. De ez esetben is: ezek különbözők és axiománk igazolva van.

A K. I.-ban ezen axioma annyit jelent, hogy az igaz különbözik a hamistól; ezen interpretáczióban tehát ez az axioma magától értetődő és szükségszerű. Az ellenkező kijelentés: $1=0$, tehát az *absurdum* (alakjánál fogva hamis kijelentés) typusa, míg a $0=0$, $1=1$ kijelentések az *identitás* (alakjuknál fogva helyes kijelentés) typusai. Ezért írjuk, hogy

$$(1=0)=0, \quad (0=0)=(1=1)=1.$$

Általánosabban minden

$$x=x$$

alakú egyenlőség æquivalens a két identitás-typussal. Ha t. i. oly egyenlőséggé alakitjuk át ezt az egyenlőséget, melynek jobb oldala 0 vagy 1, akkor azt nyerjük, hogy

$$(xx'+xx'=0)=(0=0), \quad (xx+xx'=1)=(1=1).$$

Viszont minden

$$x=x'$$

alakú egyenlőség æquivalens az absurdum typusával; ugyanúgy nyerjük t. i., hogy

$$(xx+x'x'=0)=(1=0), \quad (xx'+xx'=1)=(0=1).$$

21. A 0 és 1 kifejtése. Eddigelé csak oly képletekkel találkoztunk, melyek a szokásos okoskodás módjait fejezték ki és így közvetlenül evidensek voltak.

Most oly elméleteket és módszereket fogunk kifejteni, melyek már eltávolodnak a gondolkodás rendes módjaitól s a melyek a szűkebb értelemben vett logikai algebrát alkotják; formális — mondhatnók — automatikus módszer ez, általános érvényességgel és megdönthetetlen biztonsággal, mely kalkulussal pótolja az okoskodást.

E módszer legfőbb eljárása a *kifejtés*. Adva lévén bizonyos tetszőleges végesszámú $a, b, c, \ldots$ tag, 0 és 1 a distributiv törvényből folyó következő képletek szerint fejthető ki e tagokra (és tagadásukra) vonatkozólag:

$$0=aa',$$

$$0=aa'+bb'=(a+b)(a+b')(a'+b)(a'+b'),$$

$$0=aa'+bb'+cc'=(a+b+c)(a+b+c')(a+b'+c)(a+b'+c')\times$$
$$\times(a'+b+c)(a'+b+c')(a'+b'+c)(a'+b'+c'),$$

$$1=a+a',$$

$$1=(a+a')(b+b')=ab+ab'+a'b+a'b',$$

$$1=(a+a')(b+b')(c+c')=abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'+$$
$$+a'b'c+a'b'c',$$

és így tovább. Általában n tag esetén a 0 tag 2^n számú tényező szorzatára, 1 pedig 2^n összeadandó összegére lesz ily módon felbontva. A 0 tényezői mindazon additiv, az 1 összeadandói pedig mindazon multiplicativ kombinácziói az adott n tagnak és tagadásuknak, melyek mindegyike n különböző elemből áll, s a melyek sohasem tartalmaznak egy tagot és tagadását egyidejűleg.

Az 1 kifejtésének összeadandóit BOOLE a mindenség *alkotói*nak nevezte. PORECZKY után tárgyalásunk *minimum*ainak is lehet ezeket nevezni, mivelhogy ezek a legkisebb osztályok, melyekre az adott n tag segitségével a mindenség oszlik; a 0 kifejtésének tényezőit ép így tárgyalásunk *maximum*ainak fogjuk nevezni, mivelhogy ezek a legnagyobb osztályok, a melyek az n adott tag segítségével a mindenségben meghatározhatók.

22. Az alkotók tulajdonságai. Az alkotók, vagyis tárgyalásunk *minimumai* két jellegzetes tulajdonságban megegyeznek az egymásnak ellentmondó tagokkal (melyeknek általánosításaként tekinthetők): *kölcsönösen kizárják egymást*, azaz bármely kettőnek közülök a szorzata 0 és *együttesen kimerítők*, azaz valamennyinek az összege kimeríti a mindenséget. E tulajdonság a megelőző képletek alapján evidens; az első tulajdonság pedig annak a következménye, hogy bármely két alkotó legalább egy (mindkettőben tényezőként szereplő) tag «jel»-ében különbözik, azaz, hogy az egyik e tagot, a másik tagadását tartalmazza mint tényezőt. Ez pedig, mint tudjuk, elég ahhoz, hogy szorzatuk nulla legyen.

A «maximum»-oknak analog és megfelelő tulajdonságaik vannak: valamennyiük szorzata, mint láttuk, nulla és bármely kettő összege 1, minthogy legalább egy (mindkettőben összeadandóként szereplő) tag jelében különböznek.

Egyszerűség kedvéért, mint Boole és Schröder, csakis az alkotók (minimumok) vagyis az 1 kifejtéseinek tanulmányozására szorítkozunk. Az olvasóra bízzuk, hogy megtalálja és bebizonyítsa a maximumokra, azaz a 0 kifejtéseire vonatkozó megfelelő tételeket.

23. Logikai függvények. *Logikai függvény*nek nevezünk minden oly tagot, melynek kifejezése összetett, azaz egyszerű tagokat jelölő betűkből és a három logikai művelet jeleiből van összetéve.[1] Egy logikai függvény valamennyi vagy egynéhány benne előforduló tag függvényének tekinthető. E tagokat ismeretleneknek vagy változóknak fogjuk tekinteni és az x, y, z betűkkel fogjuk jelölni. Az x, y, z változók vagy ismeretlenek valamely függvényét $f(x, y, z)$ vagy más hasonló

[1] Ebben az algebrában a logikai függvény: a közönséges algebra *egész függvény*ének az analogonja; csak az a különbség, hogy itt nincs más hatvány, csak az első.

jelképpel fogjuk jelölni, ép úgy, mint a közönséges algebrában. Röviden: a logikai függvény a mindenség bármely tagjának függvényeként tekinthető, akár szerepel ez az explicite kiírt kifejezésben, akár nem.

24. A kifejtés törvénye. Ezek után áttérünk arra a feladatra, hogy mikép lehet egy $f(x)$ függvényt x szerint kifejteni; tekintsük a feladatot megoldottnak és legyen

$$ax+bx'$$

a keresett kifejtés.

Feltevés szerint tehát x minden értékére fennáll az

$$f(x)=ax+bx'$$

egyenlőség. Ha $x=1$, tehát $x'=0$, akkor innen

$$f(1)=a.$$

Ha pedig $x=0$, $x'=1$ helyettesítést végezzük, akkor

$$f(0)=b.$$

Ez a két egyenlőség meghatározza a kifejtés a és b együtthatóját; e kifejtés tehát így írható:

$$f(x)=f(1)\,x+f(0)\,x'\,;$$

$f(1)$, $f(0)$ azt jelölik itt, a mi $f(x)$-ből lesz, ha $x=1$, illetve $x=0$.

Következmény. Ha a megelőző két egyenlőség két oldalát először x szel, azután x'-vel megszorozzuk, a következő Mac Coll-féle egyenlőségpárokat nyerjük:

$$xf(x)=ax, \qquad x'f(x)=bx',$$
$$xf(x)=xf(1), \qquad x'f(x)=x'f(0).$$

Fejtsünk ki most már egy két- vagy többváltozós függvényt e két változó, x és y szerint. Először x szerint fejtve ki az $f(x, y)$ függvényt:

$$f(x, y)=f(1, y)\,x+f(0, y)\,x'.$$

Ha a jobb oldalt most meg y szerint fejtjük ki:

$$f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)xy' + f(0, 1)x'y + f(0, 0)x'y'.$$

Ez az eredmény symmetrikus a két változóra nézve s így független attól, hogy milyen sorrendben végezzük a szerintük való kifejtést.

Ép így nyerhetnők egymás után a 3, 4, ... változós függvény kifejtését.

A kifejtés általános törvénye a következő:

Egy n változós függvény kifejtése czéljából megalkotjuk ezen n változó valamennyi alkotóját s ezeket egyenként megszorozzuk a függvény azon értékével, melyet felvesz, ha a megfelelő alkotó minden egyszerű tényezőjét egyenlővé teszszük 1-gyel (azaz 0-val teszszük egyenlővé azokat, melyeknek tagadásuk szerepel az illető alkotóban).

Ha valamelyik változó, mely szerint a kifejtést végezzük, például y a függvényben explicite nem szerepel [pl.: $f(x)$], akkor az általános szabály szerint:

$$f(x) = f(x)y + f(x)y'.$$

Ha nevezetesen a állandó (független a változóktól, melyek szerint kifejtünk), egymás után következő kifejtéseit nyerjük:

$$a = ax + ax',$$
$$a = axy + axy' + ax'y + ax'y',$$
$$a = axyz + axyz' + axy'z + axy'z' +$$
$$+ ax'yz + ax'yz' + ax'y'z + ax'y'z',^{1}$$

és így tovább. E képleteket egyébként direkte is nyerhettük volna: a-val szorozva 1 kifejtéseinek két oldalát.

Következmények. 1°. Érvényes a következő egyenlőség:

$$(a + x')(b + x) = ax + bx' + ab = ax + bx'.$$

Valóban, x szerint kifejtve

$$ax + bx' + abx + abx' = (a + ab)x + (b + ab)x' = ax + bx'.$$

[1] E képletek a dichotomia szerint való osztályozás módszerét fejezik ki.

2°. Érvényes továbbá

$$ax+bx'+c=(a+c)x+(b+c)x',$$

mert a c tagot x szerint kifejtve

$$ax+bx'+cx+cx'=(a+c)x+(b+c)x'.$$

Ha tehát egy függvény x-től független tagokat is tartalmaz (ezeknek összege van itt c-vel jelölve), mindenkor a kifejtett $ax+bx'$ alakra hozható, azáltal, hogy c-t mind az x, mind az x' együtthatójához hozzáadjuk. Minden függvényt tehát ily alakban vehetünk fel.

Praktikusan úgy végezzük e kifejtést, hogy minden tagot, mely egy bizonyos betűt (pl. x-et) nem tartalmaz, $(x+x')$-vel megszorozzuk és a szorzatot a distributiv törvény szerint kifejtjük. Végül a hasonló tagokat — ha vannak ilyenek — egy taggá vonjuk össze.

25. De Morgan képletei. *Az 1 tetszőleges kifejtésében néhány alkotó összege: tagadása a többi alkotó összegének.*

Valóban e két összeg összege a feltevés szerint 1, szorzatuk pedig 0, minthogy két különböző alkotó szorzata mindig 0.

Levezetjük innen De Morgan képleteit:

$$(a+b)'=a'b', \quad (ab)'=a'+b'.$$

Bizonyítás. Az $(a+b)$ összeg kifejtése:

$$a+b=ab+ab'+ab+a'b=ab+ab'+a'b.$$

Ámde 1 kifejtése a és b szerint tartalmazza e kifejtés három tagját és még a negyedik $a'b'$ tagot, a mely tehát a másik három összegének a tagadása.

A második képlet vagy megfelelő okoskodással mutatható ki (0-nak tényezőkre való kifejtése segítségével) vagy pedig annak a figyelembe vételével, hogy $a'+b'$ kifejtése

$$a'b+ab'+a'b'$$

csak az ab összeadandóban különbözik 1 kifejtésétől.

De Morgan képletei könnyen általánosíthatók; három összeadandó esetére például:

$$a+b+c=abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'+a'b'c.$$

E kifejtés 1 kifejtésétől csak az $a'b'c'$ tagban különbözik; ennek alapján kimutathatók De Morgan tételeinek következő általánosításai:

$$(a+b+c)'=a'b'c', \quad (abc)'=a'+b'+c'.$$

A kalkulusban igen gyakran szerepelnek De Morgan képletei, mert segítségükkel *véghez vihetjük* egy összeg vagy szorzat tagadását, úgy értve ezt, hogy a tagadást csakis egyszerű tagokra vonatkoztatjuk: egy összeg tagadása az összeadandók tagadásának szorzata; egy szorzat tagadása a tényezők tagadásának szorzata.

E tételek szerint továbbá áttérhetünk egy elsőrendű kijelentésről a dualitás szerint neki megfelelő kijelentésre és kimutathatjuk, hogy a kettő egyenlő értékű. E czélból elegendő az adott kijelentésre a contrapositio törvényét alkalmazni és *véghez vinni* a két oldal tagadását.

Példa:

$$ab+ac+bc=(a+b)(a+c)(b+c).$$

Bizonyítás:

$$(ab+ac+bc)'=[(a+b)(a+c)(b+c)]',$$

$$(ab)'(ac)'(bc)'=(a+b)'+(a+c)'+(b+c)',$$

$$(a'+b')(a'+c')(b'+c')=a'b'+a'c'+b'c'.$$

Mivelhogy az a, b, c tagok tetszőlegesek, a hozzájuk illesztett tagadási jel elhagyható és ily módon a megadott képlethez jutunk vissza.

De Morgan képletei ily módon módot adnak egy tétel duális tételének megtalálására és bizonyitására; ámde, mint mondottuk (14. p.), nem alapjai a dualitásnak.

26. Szétválasztott összegek. A kifejtés segitségével egy tetszőleges összeg *szétválasztott* összegé alakítható át, azaz olyanná, melyben bármely két összeadandó szorzata zérus.

Legyen valóban $(a+b+c)$ az az összeg, melynek összeadandóiról nem tudjuk, hogy szét vannak-e választva; felteszszük tehát, hogy nincsenek. A kifejtés szerint:

$$a+b+c=abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'+a'b'c.$$

Itt az első négy tag a-nak b és c szerint való kifejtése, a rákövetkező két tag pedig $a'b$ kifejtése c szerint s így összegünk számára az

$$a+a'b+a'b'c$$

kifejezést nyerjük. Ezen összegben pedig, mint az előbbiben is, az összeadandók szét vannak választva, a mint ez könnyen igazolható. Ezen eljárás egészen általános és egyébként is evidens: hogy minden a-t, minden b-t, minden c-t, ... felsoroljunk, ahhoz elég felsorolni: minden a-t, aztán minden b-t, mely nem egyszersmind a is, majd minden c-t, a mely se nem a, se nem b, és így tovább.

Megjegyezzük, hogy az így nyert kifejezés nem symmetrikus, minthogy az összeadandóknak felvett sorrendjétől függ; a fenti összeg még így is irható:

$$b+ab'+a'b'c, \quad c+ac'+a'bc', \ldots$$

Viszont valamely összeg kifejezésének egyszerűsítése céljából az (alkalmasan elrendezett) összeadandók mindegyikéből elhagyható oly tényező, mely egy megelőző összeadandónak a tagadása. Ily módon symmetrikus alakot adhatunk egy összegnek. Például:

$$a+a'b=b+ab'=a+b.$$

27. A kifejtett függvények tulajdonságai. A kifejtések következő tulajdonsága az, mely a kifejtési eljárást a logika algebrájában prakticze használhatóvá teszi.

Két ugyanazon betűk szerint kifejtett függvény összegét vagy szorzatát úgy nyerjük, hogy egyszerűen az együtthatók összegét vagy szorzatát képezzük; egy kifejtett függvény tagadását pedig úgy végezzük el, hogy a kifejtés együtthatóit tagadásukkal pótoljuk.

Kimutatjuk ezt két változó esetére; világos lesz azonban, hogy a bizonyítás általános érvényű.

Legyen

$$a_1xy+b_1xy'+c_1x'y+d_1x'y',$$
$$a_2xy+b_2xy'+c_2x'y+d_2x'y'$$

a két kifejtett függvény.

1°. Tételünk szerint összegük

$$(a_1+a_2)\,xy+(b_1+b_2)\,xy'+(c_1+c_2)\,x'y+(d_1+d_2)\,x'y'.$$

Ez közvetlenül a distributiv törvényből folyik.

2°. Szorzatuk pedig

$$a_1a_2xy+b_1b_2xy'+c_1c_2x'y+d_1d_2x'y'.$$

Valóban, ha a szorzást az általános szabály szerint (a distributiv törvény alkalmazásával) végezzük, két különböző alkotójú tagnak a szorzata mindig 0 lesz; csak ugyanazon alkotójú tagok szorzata marad tehát meg, és minthogy (a tautologia törvénye szerint) ezen alkotónak önmagával való szorzata egyenlő evvel az alkotóval, elegendő az együtthatókat összeszorozni.

3°. Végül azt állítjuk, hogy

$$axy+bxy'+cx'y+dx'y'$$

tagadása:

$$a'xy+b'xy'+c'x'y+d'x'y'.$$

Ennek bizonyítására elég kimutatni, hogy e két függvény szorzata 0 és összege 1. Valóban:

$$(axy+bx'y+cxy'+dx'y')\,(a'xy+b'x'y+c'xy'+d'x'y')=$$
$$=aa'xy+bb'xy'+cc'x'y+dd'x'y'=$$
$$=0\,.\,xy+0\,.\,xy'+0\,.\,x'y+0\,.\,x'y'=0.$$
$$(axy+bx'y+cxy'+dx'y')+(a'xy+b'x'y+c'xy'+d'x'y')=$$
$$=(a+a')\,xy+(b+b')\,x'y+(c+c')\,xy'+(a+d')\,x'y'=$$
$$=1\,.\,xy+1\,.\,x'y+1\,.\,xy'+1\,.\,x'y'=1.$$

Különleges eset. Érvényesek a következő egyenlőségek:

$$(ab+a'b')'=ab'+a'b,$$
$$(ab'+a'b)'=ab+a'b',$$

melyek sok más módon is igazolhatók, például annak tekintetbe vételével, hogy az $ab'+a'b$ és $ab+a'b'$ összegek együtt 1 kifejtését adják vagy pedig elvégezve DE MORGAN képletei segítségével az $(ab+a'b')$ tagadást.

Ezen egyenlőségekből a következő folyik:

$$(ab'+a'b=0)=(ab+a'b'=1),$$

melyet egyébként úgy is nyerhettünk volna, hogy a (18. pontbeli)

$$(a=b)=(ab'+a'b=0)=[(a+b')(a'+b)=1]$$

egyenlőségben elvégezzük a kijelölt szorzást.

Tétel. Érvényesek a következő egyenlőségek:[1]

$$(a=bc'+b'c)=(b=ac'+a'c)=(c=ab'+a'b).$$

Ha t. i. az első egyenlőséget olyanná alakítjuk át, melynek jobb oldala 0, ezt nyerjük

$$a(bc+b'c')+a'(bc'+b'c)=0,$$
$$abc+ab'c'+a'bc'+a'b'c=0.$$

Minthogy a bal oldal itt a, b és c-re nézve symmetrikus, azért a másik két egyenlőség, mely az elsőtől csakis a három betű permutácziójában különbözik, ugyanehhez az egyenlőséghez vezet, a mivel tételünk be van bizonyítva.

Következmény. Ha egyidejűleg:

$$a<bc'+b'c,\quad b<ac'+a'c,\quad c<ab'+a'b,$$

akkor az inverz inclúsiók is érvényesek, tehát a megfelelő egyenlőségek is:

$$a=bc'+b'c,\quad b=ac'+a'c,\quad c=ab'+a'b.$$

Valóban, egyenlőségekké alakítva át az adott inclusiókat:

$$abc+ab'c'=0,\quad abc+a'bc'=0,\quad abc+a'b'c=0;$$

ezeket egyesítve az

$$abc+ab'c'+a'bc'+a'b'c=0$$

[1] STANLEY JEVONS: *Pure Logic,* 1864, 61. l.

egyenlőséghez jutunk. Ámde ez, mint láttuk, ugyanannyit jelent, mint a kimutatandó három egyenlőség bármelyike.

28. Függvényhatárok. Azt mondjuk, hogy az x tag az a és b tagok *közt foglaltatik,* ha az egyiket tartalmazza s a másikban bent foglaltatik, ha tehát például:

$$a < x, \quad x < b,$$

a mit röviden így is írunk:

$$a < x < b.$$

Ily képletet *kettős inclusió*nak nevezünk. Ha x változó és mindig a és b közt van, ez utóbbiakat x határainak nevezzük. És pedig az első (mely x-ben bentfoglaltatik): *alsó határ,* a második (mely x-et tartalmazza) *felső határ.*

Tétel. Egy kifejtett függvény: együtthatóinak összege és szorzata közt foglaltatik.

Mutassuk ki e tételt először egy változós függvényre:

$$ax + bx'.$$

Egyrészt

$$(ab < a) < (abx < ax),$$
$$(ab < b) < (abx' < bx').$$

Tehát

$$abx + abx' < ax + bx',$$

vagyis

$$ab < ax + bx'.$$

Másrészt pedig

$$(a < a + b) < [ax < (a + b)\, x],$$
$$(b < a + b) < [bx' < (a + b)\, x'].$$

Tehát

$$ax + bx' < (a + b)(x + x'),$$

vagyis

$$ax + bx' < a + b.$$

Összefoglalva:

$$ab < ax + bx' < a + b. \qquad Q.\ E.\ D.$$

Megjegyzés. 1°. Ugyanez a kettős inclusio még a következő alakra hozható:[1]

$$f(b) < f(x) < f(a).$$

[1] EUGEN MÜLLER: *Aus der Algebra der Logik,* II. fej.

Valóban:

$$f(a)=aa+ba'=a+b,$$
$$f(b)=ab+bb'=ab.$$

De úgy látszik, hogy ez az egy ismeretlennel biró egyenletre jellemző alak, nem általánositható, míg az első alak igen. Valóban könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a fenti bizonyitás általános érvényű. Bármekkora is a változók száma n (és így az alkotók száma is: 2^n), ép így kimutatható, hogy a függvény tartalmazza együtthatóinak szorzatát és bentfoglaltatik összegükben. A tétel tehát egészen általános.

2°. E tétel feltételezi, hogy minden együttható szerepel a kifejtésben s így a hiányzóknak is szerepelniök kell a 0 együtthatóval. Ez esetben az együtthatók szorzata természetesen 0. Ép így 1 az együtthatók összege, ha valamelyik együttható 1.

Később (38. p.) ki fogjuk mutatni, hogy a függvény elérheti két határát, hogy tehát ezek szélső értékei. Eddig azonban csak annyit tudunk, hogy köztük foglaltatik.

29. Poreczky képlete.[1] Érvényes a következő egyenlőség:

$$(x=ax+bx')=(b<x<a).$$

Bizonyítás. Szorozzuk meg x-szel a bal oldalon szereplő egyenlőség két oldalát, akkor nyerjük, hogy

$$x=ax,$$

a mi, mint tudjuk, ugyanannyit jelent, mint

$$x<a.$$

Majd x'-sal szorozva a két oldalt:

$$0=bx',$$

a mi ugyanannyit jelent, mint

$$b<x.$$

[1] Poreczky: Sur les méthodes pour résoudre les égalités logiques. (Bulletin de la Société physico-mathématique de Kazan, II. kötet, 1884.)

Összefoglalva tehát:

$$(x=ax+bx')<(b<x<a).$$

Másrészt azonban:

$$(b<x<a)<(x=ax+bx').$$

Valóban:

$$(x<a)=(x=ax),$$
$$(b<x)=(bx'=0).$$

Összeadva e két egyenlőséget:

$$(x=ax)(0=bx')<(x=ax+bx').$$

Tehát

$$(b<x<a)<(x=ax+bx').$$

Tételünk ily módon be van bizonyitva.

30. Schröder tétele.[1] Az

$$ax+bx'=0$$

egyenlőség annyit jelent, hogy x az a' és b közt foglaltatik.

Bizonyítás:

$$(ax+bx'=0)=(ax=0)(bx'=0),$$
$$(ax=0)=(x<a'),$$
$$(bx'=0)=(b<x).$$

Tehát

$$(ax+bx'=0)=(b<x<a').$$

Egybevetve e tételt Poreczky képletével, közvetlenül az

$$(ax+bx'=0)=(x=a'x+bx')$$

egyenlőséghez jutunk, mely direkte úgy mutatható ki, hogy Poreczky képletét oly egyenlőségbe viszszük át, melynek jobb oldala 0:

$$(x=a'x+bx')=[x(ax+b'x')+x'(a'x+bx')=0]=(ax+bx'=0).$$

Ha ezt az egyenlőséget, mint az x ismeretlenre vonatkozó egyenletet tekintjük, akkor Poreczky képlete a megoldás.

[1] Schröder: *Operationskreis des Logikkalkuls*, 20. tétel, 1877.

A kettős

$$b < x < a'$$

inclusióból a syllogismus elve szerint

$$b < a'$$

következik.

Ez tehát az adott egyenlőség következménye, mely az x ismeretlentől független és melyet az egyenlet (x *kiküszöbölésével* nyert) *resultáns*ának neveznek. Egyébként egyenlő értékű a következő kijelentéssel:

$$ab = 0;$$

és így tehát:

$$(ax + bx' = 0) < (ab = 0).$$

Ennek tekintetbe vételével megoldásunk egyszerűsíthető; valóban

$$(ab = 0) = (b = a'b).$$

Tehát

$$\begin{aligned} x &= a'x + bx' = a'x + a'bx' \\ &= a'bx + a'b'x + a'bx' = a'b + a'b'x \\ &= b + a'b'x = b + a'x. \end{aligned}$$

A megoldásnak ez az alakja leginkább felel meg a közönséges értelemnek: minthogy x tartalmazza b-t és bentfoglaltatik a'-ban, igen természetes, hogy x összege b-nek és a' egy részének (t. i. a' és x közös részének). A megoldás általában (az a' és b határok közt) határozatlan. Csak akkor van meghatározva, ha határai egyenlők:

$$a' = b,$$

mert akkor

$$x = b + a'x = b + bx = b = a'.$$

Egyenletünk akkor valóban az

$$(ax + a'x' = 0) = (a' = x)$$

alakot veszi fel és egyenlő értékű a következő kettős inclusióval:

$$(a' < x < a') = (x = a').$$

31. A kiküszöbölés resultánsa. Ha ab nem zérus, az egyenlet lehetetlen (mindig hamis), minthogy hamis következménye van. Ezért SCHRÖDER az elimináczió resultánsát, mint az egyenlet *feltételét* tekinti. E kétértelmű szó könnyen adhat tévedésre alkalmat: a resultáns nem *oka* az egyenletnek, hanem *következménye*, nem *elegendő* feltétele, hanem *szükséges* feltétele.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha meggondoljuk, hogy ab az $ax+bx'$ függvény alsó határa, s így ez csak akkor lehet 0, ha e határ 0:

$$(ab<ax+bx')\,(ax+bx'=0)<(ab=0).$$

A kiküszöbölés resultánsa más æquivalens alakokra is hozható: például, ha az egyenletet

$$(a+x')\,(b+x)=0$$

alakban írjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a resultáns:

$$ab=0$$

egyszerűen úgy nyerhető, hogy az ismeretlent mindenütt kitöröljük (azaz kihagyjuk az x és x' tagokat). Egyenletünk még így is írható:

$$a'x+b'x'=1$$

s ekkor is a resultáns:

$$a'+b'=1$$

egyszerűen az ismeretlen kihagyásával keletkezik.[1]

[1] Ez MISS LADD és MITCHELL eliminácziós módszere. De ez a látszólag igen egyszerű szabály nem általános; nem alkalmazható, ha egyenletünk az

$$ax+bx'=0,\quad (a'+x')\,(b'+x)=1$$

alakok valamelyikében van adva.

Egyenlőtlenségek esetében, mint (az 54. pontban) látni fogjuk épen fordítva az

$$ax+bx'\neq 0,\quad (a'+x')\,(b'+x)\neq 1$$

alakokra alkalmazható, de nem alkalmazható a következő æquivalens alakokra:

$$(a+x')\,(b+x)\neq 0,\quad a'x+b'x'\neq 1.$$

Megjegyzés. Ha az

$$ax+bx'=0$$

egyenletbe behelyettesítjük a belőle x számára nyert értéket:

$$x=a'x+bx', \quad x'=ax+b'x',$$

akkor ezt nyerjük:

$$(abx+abx'=0)=(ab=0),$$

azaz ép az x kiküszöbölésének resultánsát, mely, mint láttuk, egyletünknek következménye. Ily módon meggyőződünk arról, hogy x értéke valóban kielégíti egyenletünket. Valamely egyenlet megoldása tehát (Voigt szerint) így definiálható: azon érték, melyet x helyébe helyettesítve, az egyenletet x kiküszöbölésének resultánsába viszi át.

Különleges eset. Ha az egyenlet x-től független összeadandót is tartalmaz, azaz ily alakú:

$$ax+bx'+c=0,$$

akkor æquivalens a következővel:

$$(a+c)x+(b+c)x'=0$$

és így a resultáns:

$$(a+c)(b+c)=ab+c=0.$$

Innen a következő praktikus szabály adódik ki: Ez esetben úgy nyerjük x kiküszöbölésének resultánsát, hogy x és x' együtthatójának az x-től független taggal nagyobbított szorzatát egyenlővé teszszük zérussal.

32. A határozatlanság esete. A mint az

$$ab=0$$

resultáns az egyenlet lehetséges voltának felel meg, ép úgy az

$$a+b=0$$

Ezért nincs meg e szabálynak az a mnemotechnikai jelentősége, melyet neki tulajdonítanak, mert, hogy helyesen használhassuk, azt is észben kell tartanunk, hogy mily alakokra alkalmazható.

egyenlőség az egyenlet *teljes határozatlanságát* jelenti. Ez esetben valóban az egyenlet, két együtthatója 0 lévén ($a=0$, $b=0$), azonosságra ($0=0$) redukálódik és ennek folytán bármily x értéknél «azonosan» ki van elégítve. Az x-et egyáltalán nem határozza meg, minthogy a kettős

$$b < x < a'$$

inclusio ez esetben a következő alakot nyeri:

$$0 < x < 1.$$

És ez semmikép sem korlátozza az x változását. Az egyenletet ez esetben *határozatlan*nak nevezik.

Ugyanezen eredményt nyerjük, ha megjegyezzük, hogy $(a+b)$ az $ax+bx'$ függvény felső határa s ha tehát e határ 0, akkor a függvény is minden x értéknél 0:

$$(ax+bx' < a+b)\,(a+b=0) < (ax+bx'=0).$$

Különleges eset. Ha az egyenlet x-től független összeadandót is tartalmaz, azaz

$$ax+bx'+c=0$$

alakú, akkor a teljes határozatlanság feltétele

$$a+b+c=0.$$

Valóban

$$ax+bx'+c=(a+c)\,x+(b+c)\,x',$$
$$(a+c)+(b+c)=a+b+c=0.$$

33. Függvények összege és szorzata. A mathematika egy fogalmát vezetjük most be, melynek alkalmazása a logika algebrájában igen kényelmes. Legyen $f(x)$ egy egy változót tartalmazó kifejezés. Tegyük fel, hogy meg van adva azon értékek összessége, melyeket x felvehet; az $f(x)$ függvény értékeinek összessége is meg van akkor határozva. Az utóbbiak összegét $\sum_x f(x)$-szel, szorzatukat $\prod_x f(x)$-szel jelöljük. Új jelölések, de nem új fogalmak ezek; egyszerűen az összeg és szorzat fogalmának alkalmazása egy függvény értékeire.

Érdekes jelentést nyer a $\sum$ és Π jel, ha kijelentésekre alkalmazzuk őket:

$$\prod_x [f(x)=0]$$

azt jelenti, hogy $f(x)=0$ *minden* x értékre igaz;

$$\sum_x [f(x)=0]$$

pedig azt, hogy $f(x)=0$ *valamely* x értékre igaz. Valóban, hogy egy szorzat 1 (azaz igaz) legyen, minden tényezőjének 1-nek (azaz igaznak) kell lennie; hogy azonban egy összeg 1 (azaz igaz) legyen, ahhoz elég, ha valamelyik összeadandója 1 (igaz). E szerint módot nyertünk változókra vonatkozó általános és különleges kijelentések kifejezésére, t. i. ha ezek ily alakúak: «a kijelentés minden x-re igaz»; «a kijelentés igaz valamely x-re».

Az

$$(a=b)=(ac=bc)(a+c=b+c)$$

æquivalenczia például bizonyos tekintetben paradoxonszerű, minthogy a jobb oldalon szerepel oly tag (c), mely nincs meg a bal oldalon. Ez onnan van, hogy ez az æquivalenczia független c-től; tehát (c-t, mint valami x változót tekintve) következőképen írható:

$$\prod_x [(a=b)=(ax=bx)(a+x=b+x)],$$

vagyis, minthogy a bal oldal független x-től:

$$(a=b)=\prod_x [(ax=bx)(a+x=b+x)].$$

Általában, ha egy kijelentés valamely változó tagot tartalmaz, gondosan meg kell különböztetni azt a két esetet, midőn a kijelentés a változó minden értékénél vagy csak valamely értékénél igaz.[1] E megkülönböztetésre szolgál a Π és $\sum$ jel.

[1] Ép úgy, a mint a mathematikában az *azonosságokat* és az *egyenleteket* megkülönböztetik, azzal a különbséggel, hogy a mathematikában esetleg a változó semmiféle értéke sem elégíti ki az egyenletet.

Ha például azt mondjuk, hogy az

$$ax + bx' = 0$$

egyenlet lehetséges, ezzel azt állitjuk, hogy valamely x kielégíti, azaz

$$\sum_x (ax + bx' = 0),$$

s minthogy ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a resultáns $(ab = 0)$ igaz legyen, azért

$$\sum_x (ax + bx' = 0) = (ab = 0),$$

míg az

$$(ax + bx' = 0) < (ab = 0)$$

képletben csak a $<$ és nem az $=$ jele írható.

Viszont annak, hogy az egyenletet minden x kielégítse:

$$a + b = 0$$

a szükséges és elegendő feltétele.

Bizonyítás. 1°. A feltétel elegendő, mert ha

$$(a + b = 0) = (a = 0)\,(b = 0),$$

akkor világos, hogy minden x-re

$$ax + bx' = 0,$$

azaz

$$\prod_x (ax + bx' = 0).$$

2°. A feltétel szükséges; ha t. i.

$$\prod_x (ax + bx' = 0),$$

akkor az egyenletet $x = a$ is kielégíti, azaz

$$a + b = 0.$$

Kimutattuk tehát a

$$\prod_x (ax + bx' = 0) = (a + b = 0)$$

æquivalencziát.[1] Ez esetben az egyenlet azonosságra redukálódik, baloldala azonosan zérus.

34. Inclusio kifejezése egy határozatlan segítségével. A bevezetett jelölés csaknem mindannyiszor elkerülhetetlen, valahányszor egy æquivalenczia egyik oldalán oly változók vagy határozatlanok szerepelnek, melyek a másik oldalon nem fordulnak elő. Több szerző például a következő két æquivalencziát állítja fel:

$$(a<b)=(a=bu)=(a+v=b),$$

hol u, v két határozatlan. Mindkét egyenlőségnek az $a<b$ inclusio folyománya, a mint u, illetve v kiküszöbölésével erről meggyőződhetünk:

1°. $[a(b'+u')+a'bu=0]=[(ab'+a'b)u+au'=0]$

és a resultáns:

$$[(ab'+a'b)a=0]=(ab'=0)=(a<b),$$

2°. $[(a+v)b'+a'bv'=0]=[b'v+(ab'+a'b)v'=0]$.

A resultáns:

$$[b(ab'+a'b)=0]=(ab'=0)=(a<b).$$

Nem lehet azonban fordítva azt mondani, hogy az $a<b$ inclusio maga után vonja a két egyenlőséget *az u és v bármely értékeire.* Csak u és v bizonyos értékeire bizonyítják ezt be, a mikor t. i.:

$$u=a, \quad v=b;$$

ekkor valóban

$$(a=ab)=(a<b)=(ab=b).$$

Ha azonban

$$u=1, \quad v=0,$$

akkor $(a=bu)$ és $(a+v=b)$ annyit mond, mint $a=b$, a mi világosan nem folyománya $(a>b)$-nek.[2]

---

[1] Eugen Müller, id. helyen.

[2] Ép így, ha

$$u=0, \quad v=1,$$

a következő egyenlőségeket nyerjük

$$(a=0), \quad (b=1);$$

és ezek még kevésbé következményei inclusiónknak.

Tehát csupán a következő æquivalencziák írhatók fel:

$$(a < b) = \sum_u (a = bu) = \sum_v (a + v = b),$$

de nem æquivalens a következő három kifejezés

$$(a < b), \quad \prod_u (a = bu), \quad \prod_v (a + v = b).$$[1]

35. Kettős inclusio kifejezése egy határozatlan segítségével. *Tétel: A*

$$b < x < a$$

kettős inclusio egyenlőértékű az

$$x = au + bu'$$

egyenlőséggel, hozzávéve ehhez a $(b < a)$ feltételt, hol az u tag teljesen határozatlan.

---

[1] A megelőző jegyzet szerint

$$\prod_u (a = bu) = (a = b = 0), \quad \prod_v (a + v = b) = (a = b = 1),$$

minthogy a $\prod$ jel alatti egyenlőségeket az

$$u = 0, \quad u = 1 \quad \text{és} \quad v = 0, \quad v = 1$$

értékeknek is ki kell elégíteniök.

Annak meghatározása czéljából, hogy az u, v határozatlanok milyen határok közt változhatnak, elegendő az

$$(a < b) = (a = bu), \quad (a < b) = (a + v = b),$$

vagyis

$$ab' = a'bu + ab' + au', \quad ab' = ab' + b'v + a'bv'$$

egyenleteket u-ra és v-re megoldani. Ezek még így is írhatók:

$$a'bu + abu' = 0, \quad a'b'v = a'bv' = 0$$

és innen a megoldás (egy később kimutatandó képlet szerint):

$$u = ab + w(a + b'), \quad v = a'b + w(a + b),$$

vagy egyszerűen:

$$u = ab + w'b', \quad v = a'b + wa,$$

hol w teljesen határozatlan. Az egyszerű józan okoskodás is elvezet ezen eredményhez, ha t. i. ezt a kérdést vetjük fel: Mily taggal kell b-t megszorozni, hogy a-t nyerjük? Oly taggal, mely tartalmazza ab-t és még non-b-nek egy tetszőleges részét. Mily tagot kell a-hoz adni, hogy b-t nyerjük? Olyat, mely tartalmazza $a'b$-t és még a-nak egy tetszőleges részét. Egy szóval u változhatik ab és $a + b'$ között, v pedig $a'b$ és $a + b$ között.

Bizonyítás. Kifejtve a kérdéses egyenlőséget:

$$x(a'u+b'u')+x'(au+bu')=0,$$

$$(a'x+ax')u+(b'x+bx')u'=0;$$

u-t kiküszöbölve:

$$a'b'x+abx'=0.$$

Ezen egyenlőség egyenlőértékű a következő kettős inclusióval:

$$ab<x<a+b.$$

De feltevés szerint

$$(b<a)=(ab=b)=(a+b=a).$$

A kettős inclusio tehát a következőre redukálódik

$$b<x<a.$$

Így tehát, bármi is az u, egyenlőségünk maga után vonja a kettős inclusiót. Fordítva is: a kettős inclusio maga után vonja az egyenlőséget, bármi is az x. A kettős inclusio t. i. ugyanannyit mond, mint

$$a'x+bx'=0,$$

és így az egyenlőség egyszerűsödik és a következőre redukálódik:

$$ax'u+b'xu'=0.$$

Innen meghatározhatjuk u értékét, mint x függvényét, minthogy a resultáns ($ab'xx'=0$) azonosan ki van elégítve. A megoldást a következő kettős inclusio adja meg

$$b'x<u<a'+x.$$

Megjegyzés. Ezen eredményünk, mely szerint u határok közt foglaltatik, nincs ellenmondásban azon állításunkkal, hogy u teljesen határozatlan. Valóban az utóbbi képlet x-et tetszőlegesnek tekinti, csak épen a kettős inclusiót kell kielégítenie; ha ellenben u-t, mint x függvényét fejezzük ki, meghatározott

x értéket veszünk tekintetbe; csak x ezen különleges értékére vonatkozólag van u határok közé szorítva.[1]

Annak szükséges és elegendő feltételét, hogy u teljesen meg legyen határozva

$$b'x = a' + x$$

fejezi ki, azaz:

$$b'xax' + (b + x')(a' + x) = 0,$$

vagyis

$$bx + a'x' = 0.$$

A feltevés szerint pedig

$$a'x + bx' = 0.$$

Egyesítve a két egyenlőséget:

$$(a' + b = 0) = (a = 1)(b = 0).$$

Ez az az eset, midőn x teljesen határozatlan, minthogy csak a 0 és 1 határok közé van szorítva.

Ez esetben

$$u = b'x = a + x = x.$$

Annak pedig, hogy u értéke teljesen határozatlan legyen,

$$b'x = 0, \quad a' + x = 1$$

együttes fennállása a szükséges és elegendő feltétele, azaz:

$$b'x + ax' = 0,$$

vagyis

$$a < x < b.$$

A feltevés szerint pedig

$$b < x < a$$

és így

$$b = x = a.$$

Ez az az eset, midőn x teljesen meg van határozva.

---

[1] Egyébként u alsó határa, x helyébe alsó határát, b-t helyettesítve, $bb' = 0$ lesz; míg u felső határa, ha x helyébe felső határát, b-t teszszük, $a + a' = 1$ lesz.

36. Egy ismeretlennel biró egyenlet megoldása. Az

$$ax+bx'=0$$

egyenlet megoldása, u határozatlan lévén, a következő alakban írható:

$$x=a'u+bu',$$

feltéve, hogy az egyenlet resultánsa ki van elégítve.

Valóban, a mint az imént bebizonyítottuk, egyenletünk következménye:

$$ab'x+a'bx'=0$$

és ez egyenlő értékű a következő kettős inclusióval

$$a'b<x<a'b.$$

A feltevés szerint azonban

$$(ab=0)=(a'b=b)=(a'+b=a').$$

A felvett megoldásból e feltevés szerint tehát

$$b<x<a'$$

és ez ugyanannyit mond, mint a kitűzött egyenlet.

Megjegyzés. Ugyanezen feltevés mellett, mely szerint

$$(ab=0)=(b<a'),$$

e megoldás a következő egyszerűbb, de kevésbbé symmetrikus alakban irható:

$$x=b+a'u,\quad x=a'(b+u).$$

Valóban: 1°. Azonosan fennáll

$$b=bu+bu'.$$

De

$$(b<a')<(bu<a'u),$$

tehát

$$(x=bu'+a'u)=(x=b+a'u).$$

2°. Kimutatjuk most, hogy

$$x=a'b+a'u.$$

Minthogy

$$a'b=b,$$

azért

$$x=b+a'u$$

és ez az előbbi alakra vezet.

Ugyanezen megoldás még a következő alakban írható:

$$x=a'b+u(ab+a'b'),$$

a mi kitűnik az

$$ab'x+a'bx'=0$$

alakra hozott egyenletből, ha még megjegyezzük, hogy

$$a'+b=ab+a'b+a'b'$$

és

$$ua'b<a'b.$$

De ez az alak fölöslegesen komplikált. Hiszen a feltevés szerint

$$ab=0$$

és így

$$x=a'b+ua'b'$$

marad. Ez pedig, minthogy

$$a'b=b, \quad a'=a'b+a'b',$$

ugyanazt mondja, mint

$$x=b+ua'.$$

Bármely alakot adjuk is a megoldásnak, az u paraméter mindig teljesen határozatlan, azaz minden lehető értéket felvehet, beleértve a 0 és 1 értékeket is; valóban, ha $u=0$, akkor

$$x=b,$$

ha pedig $u=1$, akkor

$$x=a'.$$

Ezek az x *szélső értékei.*

Érthető tehát, hogy x meg van határozva azon különleges esetben, midőn $a'=b$ és hogy ellenkezőleg teljesen határozatlan abban a különleges esetben, midőn

$$b=0, \quad a'=1 \qquad \text{(vagyis } a=0\text{)}.$$

Végeredményben az

$$x = a'u + bu'$$

képlet az (a' és b közé) «határolt» x változót a «határolatlan» u változóval pótolja (mely minden lehető értéket felvehet, beleértve 0-t és 1-et is).

Megjegyzés.[1] Az

$$x = a'x + bx'$$

megoldás mindenesetre egyenlőértékű az adott egyenlettel, de a határozatlan u függvényeképen írt

$$x = a'u + bu'$$

megoldás nem ilyen. Valóban, ezt kifejtve:

$$ab'x + a'bx' + ab\,(xu + x'u') + a'b'\,(xu' + x'u) = 0\,;$$

összehasonlítva ezt a kifejtett egyenlettel, a mely

$$ab + ab'x + a'bx' = 0,$$

megállapitható, hogy ez a megoldáson *felül* még az

$$ab\,(xu' + x'u) = 0$$

egyenlőséget és ugyanezen megoldás *híjjával* az

$$a'b'\,(xu' + x'u) = 0$$

egyenlőséget tartalmazza.

E két tag eltűnik, ha

$$u = x$$

és ekkor visszanyerjük az

$$x = a'x + bx'$$

képletet.

Ezen észrevételből Poreczky azt az eredményt vonja le, hogy egy egyenlet megoldása általában sem nem következménye, sem nem oka az egyenletnek. Csak azon különleges esetben ok, a midőn

$$ab = 0$$

[1] Poreczky: Sept lois . . ., XXXIII. és XXXIV. fej.

és csak akkor következmény, ha

$$(a'b'=0)=(a+b=1).$$

Ha

$$ab=0$$

nem igaz, az egyenlet megoldhatatlan és a megoldás képlete lehetetlen; ez magyarázza meg a megelőző paradoxont. Ha egyidejűleg

$$ab=0, \quad a+b=1,$$

akkor a megoldás következmény és ok egyszerre, azaz egyenlő értékű az egyenlettel. Valóban ezen $(a'=b)$ esetben az egyenlet meg van határozva és csak egy megoldása van:

$$x=a'=b.$$

Valahányszor tehát egy egyenlet megoldható, a megoldás (valamely) oka az egyenletnek és tényleg az is a feladat, hogy oly értéket találjunk x számára, a mely az egyenletet kielégíti, vagyis a mely ennek egy oka.

Végeredményben a következő æquivalencziát nyertük:

$$(ax+bx'=0)=(ab=0)\sum_u(x=a'u+bu'),$$

mely a következő implikácziókat tartalmazza:

$$(ax+bx'=0)<(ab=0),$$
$$(ax+bx'=0)<\sum_u(x=a'u+bu'),$$
$$(ab=0)\sum_u(x=a'u+bu')<(ax+bx'=0).$$

37. Több ismeretlen kiküszöbölése. Tekintsünk most egy egyenletet több ismeretlennel, a melyről felteszszük, hogy normálalakra van hozva, azaz jobb oldala 0, a bal oldal pedig az ismeretlenek szerint ki van fejtve. Először a kiküszöbölés problémájával foglalkozunk. Az ismeretleneket kiküszöbölhetjük akár egyenként, akár egyszerre valamennyit.

Tartalmazzon az egyenlet például három ismeretlent:

$$\varphi(x, y, z)=axyz+bxyz'+cxy'z+dxy'z'+$$
$$+fx'yz+gx'yz'+hx'y'z+kx'y'z'=0. \qquad (1)$$

Innen z-t oly módon küszöbölhetjük ki, hogy egyedüli ismeretlennek tekintjük és a resultánst képezzük:

$$(axy+cxy'+fx'y+hx'y')(bxy+dxy'+gx'y+kx'y')=0,$$

vagyis

$$abxy+cdxy'+fgx'y+hkx'y'=0. \qquad (2)$$

Ha az (1) egyenlet lehetséges, (2) is az, vagyis bizonyos x, y értékek kielégítik. Kiküszöbölhetjük tehát innen y-t (egyedüli ismeretlennek tekintve) és ekkor a következő resultánst nyerjük:

$$(abx+fgx')(cdx+hkx')=0,$$

vagyis

$$abcdx+fghkx'=0. \qquad (3)$$

Ha az (1) egyenlet lehetséges, a (3) is az, vagyis bizonyos x érték kielégíti. Kiküszöbölhetjük tehát x-et és végső resultánsképen ezt nyerjük:

$$abcd\,.\,fghk=0,$$

a mely (1)-nek az ismeretlenektől független folyománya. A symmetria világosan mutatja, hogy ugyanezen resultánshoz jutunk, ha bármely más sorrendben küszöböljük ki az ismeretleneket. Ez az eredmény egyébként előrelátható volt, mert — (a 28. pont szerint)

$$abcdfghk<\varphi(x,y,z)$$

lévén — $\varphi(x, y, z)$ csak úgy tűnhetik el, ha az együtthatók szorzata eltűnik:

$$[\varphi(x,y,z)=0]<(abcdfghk=0).$$

Valamennyi ismeretlen tehát egyidejűleg kiküszöbölhető és az eredmény az, hogy az összes ismeretlenek szerint kifejtett függvény együtthatóinak szorzata 0.

Ugyanígy járunk el, ha csak néhány ismeretlent akarunk kiküszöbölni: a bal oldalt ezen ismeretlenek szerint fejtjük ki és e kifejtés együtthatóinak szorzatát egyenlővé teszszük 0-val. E szorzat (általában) a többi ismeretlent is tartalmazza. Ily módon a z kiküszöbölésének resultánsa, mint láttuk

$$abxy+cdxy'+fgx'y+hkx'y'=0,$$

y és z kiküszöbölésének resultánsa pedig:

$$abcdx+fghkx'=0.$$

E parcziális resultánsokat a következő praktikus szabálylyal nyerhetjük: megalkotjuk a megtartott ismeretlenekre vonatkozó alkotókat és együtthatóúl mindegyiküknek az általános kifejtésben szereplő azon összeadandók együtthatóinak szorzatát adjuk, a melyekben az illető alkotó mint tényező szerepel és az így nyert szorzatok összegét egyenlővé teszszük 0-sal.

38. A függvény értékeire vonatkozó tétel. *Mindazon értékek, melyeket tetszőleges számú változó valamely függvénye*

$$f(x, y, z, \dots)$$

felvehet, meg vannak adva az

$$abc\dots k+u(a+b+c+\dots+k)$$

képlettel, hol u teljesen határozatlan és $a, b, c, \dots, k$ az f kifejtésének együtthatói.

Bizonyítás. Elégséges kimutatni, hogy az

$$f(x, y, z, \dots)=abc\dots k+u(a+b+c+\dots+k)$$

egyenlőségben u minden lehető értéket felvehet, azaz, hogy ez az egyenlőség, ha mint u-ra vonatkozó egyenletet tekintjük, határozatlan.

Először is a jobb oldal nagyobb homogeneitás kedvéért

$$u'abc\dots k+u(a+b+c+\dots+k)$$

alakra hozható, hiszen

$$abc\dots k=uabc\dots k+u'abc\dots k$$

és

$$uabc\dots k<u(a+b+c+\dots+k).$$

Három (x, y, z) változóra szorítkozva a jobb oldalt 0-ra redukáljuk:

$$(axyz+bxyz'+cxy'z+\cdots+kx'y'z')$$
$$[ua'b'c'\ldots k'+u'(a'+b'+c'+\cdots+k]+$$
$$+(a'xyz+b'xyz'+c'xy'z+\cdots+k'x'y'z')$$
$$[u(a+b+c+\cdots+k)+u'abc\ldots k]=0,$$

vagy egyszerűbben:

$$u(a+b+c+\cdots+k)(a'xyz+b'xyz'+c'xy'z+\cdots+k'x'y'z')+$$
$$+u'(a'+b'+c'+\cdots+k')(axyz+bxyz'+cxy'z+\cdots+kx'y'z')=0.$$

Ha valamennyi x, y, z,... változót kiküszöböljük, de az u határozatlant megtartjuk, a következő resultánshoz jutunk:

$$u(a+b+c+\cdots+k)a'b'c'\ldots k'+$$
$$+u'(a'+b'+c'+\cdots+k')abc\ldots k=0.$$

De itt u és u' együtthatója azonosan eltűnik és így u teljesen határozatlan.[1] És épen ez az, a mit ki akartunk mutatni.

A bebizonyított tételből azon igen fontos következmény vonható le, hogy akárhány változó függvénye átalakítható «értéktartomány»-ának kisebbítése, sőt általában változtatása nélkül, egy változó függvényévé.

Következmény. Akárhány változó függvénye egyenlővé válhatik mindkét határával.

Valóban, ha a függvényt az æquivalens

$$abc\ldots k+u(a+b+c+\cdots+k)$$

alakra hozzuk, kitűnik, hogy egyenlő lesz minimumával, $abc\ldots k$-val, ha $u=0$ és maximumával, $a+b+c+\cdots+k$-val, ha $u=1$.

Ezt egyébként a függvény eredeti alakján is kimutathatjuk, megfelelő értékeket adva a változóknak.

Minden függvény felvehet tehát minden határai közt fekvő értéket, beszámítva a határokat. Ennélfogva abban az esetben, midőn

---

[1] WHITEHEAD: Universal Algebra, I. kötet, 33. §. (4).

$$ab c\dots k=0. \quad a+b+c+\cdots+k=1,$$

vagyis

$$abc\dots k=0=a'b'c'\dots k',$$

a függvény teljesen határozatlan.

39. A lehetetlenség és határozatlanság feltételei. A megelőző tétel segítségével megállapíthatjuk egy több ismeretlent tartalmazó egyenlet lehetetlenségének és határozatlanságának feltételeit. Legyen $f(x, y, z, \dots)$ a bal oldal, melyet kifejtve képzelünk és legyenek $a, b, c, \dots k$ ennek együtthatói.

Hogy az egyenlet lehetséges legyen, annak szükséges és elegendő feltétele:

$$abc\dots k=0.$$

Valóban, ha 1°. f eltűnik az ismeretlenek bizonyos értékeinél, alsó határának, $abc\dots k$-nak is el kell tűnnie; 2°, ha $abc\dots k$ eltűnik, akkor f, minthogy vele egyenlővé válhatik, az ismeretlenek bizonyos értékeinél szintén 0 lesz.

A szükséges és elegendő feltétel arra, hogy az egyenlet határozatlan legyen, azaz azonosan ki legyen elégítve:

$$a+b+c+\cdots+k=0.$$

Valóban, ha 1°. $a+b+c+\cdots+k$ eltűnik, akkor, mivelhogy ez f-nek felső határa, f-nek is szükségképen mindig el kell tűnnie; 2°. ha az ismeretlenek minden értékénél $f=0$, akkor $a+b+c+\cdots+k$ is 0 lesz, mert ez a függvényértékek valamelyike.

Végeredményben tehát a következő két æquivalencziát nyertük:

$$\sum [f(x, y, z, \dots)=0]=(abc\dots k=0),$$
$$\Pi [f(x, y, z, \dots)=0]=(a+b+c+\cdots+k=0).$$

Az $abc\dots k=0$ egyenlőség, mint tudjuk, az összes ismeretlenek kiküszöbölésének resultánsa; ezen — az összes ismeretlenektől független — következmény vonható le a (kielégítettnek képzelt) egyenletből.

40. Több ismeretlennel biró egyenletek megoldása. Lássuk másrészt, hogy mikép lehet az egyenletet a különböző ismeretlenekre vonatkozólag megoldani. Két változóra szorítkozva az egyenlet

$$axy+bxy'+cx'y+dx'y'=0.$$

Oldjuk meg először x-re:

$$x=(a'y+b'y')x+(cy+dy')x'$$

Az x kiküszöbölésének resultánsa:

$$acy+bdy'=0.$$

Ha az adott egyenlet igaz, ez a resultáns is igaz. De ez csak y-t tartalmazza és a megoldás:

$$y=(a'+c')y+bdy'.$$

Lehetett volna először y-t, azután x-et kiküszöbölni, akkor azt nyertük volna, hogy

$$y=(a'x+c'x')y+(bx+dx')y'$$

és az x-re vonatkozó egyenlet:

$$abx+cdx'=0,$$

melynek megoldása

$$x=(a'+b')x+cdx'.$$

Látjuk, hogy egy két ismeretlennel biró egyenlet megoldása nem symmetrikus ezen ismeretlenekre vonatkozólag: a szerint, hogy mily sorrendben küszöböljük ki őket vagy az

$$x=(a'y+b'y')x+(cy+dy')x',$$
$$y=(a'+c')y+bdy',$$

vagy az

$$x=(a'+b')x+cdx',$$
$$y=(a'x+c'x')y+(bx+dx')y'$$

megoldást nyerjük.

Ha a jobb oldalon x-et és y-t az u, v határozatlanokkal pótoljuk, az egyik ismeretlen egy, a másik két határozatlantól fog függeni. Symmetrikus megoldást nyerünk pedig a következő két képlet egyesítésével:

$$x=(a'+b')u+cdu,$$
$$y=(a'+c')v+bdv,$$

de a két határozatlan u és v ekkor már nem független egymástól. Ha t. i. e megoldást behelyettesítjük az adott egyenletbe, ez a következő alakot nyeri:

$$abcd+ab'c'uv+a'bd'uv'+a'cd'u'v+b'c'du'v'=0.$$

Ez egy «feltételi egyenlet», melyet az u, v határozatlanoknak ki kell elégíteniök; ez az egyenlet mindig kielegíthető, mert a resultáns azonosan igaz:

$$ab'c'.\,a'bd'.\,a'cd'.\,b'c'd=aa'.\,bb'.\,cc'.\,dd'=0,$$

de egy tetszőleges u, v értékpár nem elégíti ki.

Általános symmetrikus megoldás is található azonban, azaz oly symmetrikus megoldás, melyben az ismeretlenek egymástól független határozatlanok függvényeiképen vannak kifejezve. E problémát SCHRÖDER,[1] WHITEHEAD[2] és JOHNSON[3] tárgyalta.

Ily megoldás keresésének azonban tisztára csak technikai értéke van; praktikus szempontból egy vagy több (vagy valamennyi) ismeretlen kiküszöbölésére törekszünk vagy pedig az egyenletet egy bizonyos ismeretlenre vonatkozólag oldjuk meg. Első esetben kifejtjük a bal oldalt a kiküszöbölendő ismeretlenekre vonatkozólag és az együtthatók szorzatát egyenlővé teszszük 0-val. A második esetben azon ismeretlenre vonatkozólag fejtünk ki, melyet ki akarunk fejezni és alkalmazzuk az egy ismeretlennel biró egyenlet megoldási képletét. Ha bizonyos ismeretleneknek vagy csak ismert tagoknak függvényeképen keressük a megoldást, előbb kiküszöböljük a többi, illetve az összes ismeretleneket és csak azután végezzük el a megoldást.

---

[1] Algebra der Logik, I. köt., 24. pont.

[2] Universal Algebra, I. köt., 35—37. pont.

[3] Sur la théorie des égalités logiques, Bibliothèque du Congrès international de Philosophic, III. kötet, 185. l. (Paris, A. Colin, 1901.)

41. Boole problémája. BOOLE szerint a logika algebrájának legáltalánosabb problémája ez:[1]

Adva lévén egy egyenlet

$$f(x, y, z, \ldots)=0)$$

(melyről felteszszük, hogy lehetséges), másrészt pedig egy

$$t=\varphi(x, y, z, \ldots)$$

kifejezés az előbbi egyenlet változóinak függvényeképen, meghatározandó e t kifejezés, mint az f-ben és φ-ben foglalt állandók függvénye.

Legyenek $p_1, p_2, p_3, \ldots$ az $x, y, z, \ldots$ változókból alkotott alkotók és legyen f és φ e változók szerint kifejtve:

$$f(x, y, z, \ldots)=Ap_1+Bp_2+Cp_3+\cdots,$$
$$\varphi(x, y, z, \ldots)=ap_1+bp_2+cp_3+\cdots$$

A t-t kifejező egyenletet 0-ra redukálva:

$$(t\varphi'+t'\varphi=0)=[(a'p_1+b'p_2+c'p_3+\cdots)t+$$
$$+(ap_1+bp_2+cp_3+\cdots)t'=0].$$

Egyesítve a két egyenletet és t szerint kifejtve:

$$[(A+a')p_1+(B+b')p_2+(C+c')p_3+\cdots]t+$$
$$+[(A+a)p_1+(B+b)p_2+(C+c)p_3+\cdots]t'=0.$$

Ez az egyenlet fogja megadni t keresett kifejezését. Ha t-t innen kiküszöbölnők, akkor — a mint várható is — resultánsul az

$$Ap_1+Bp_2+Cp_3+\cdots=0$$

egyenlőséget nyernők. Ha ellenben az $x, y, z, \ldots$ változókat (azaz a $p_1, p_2, p_3, \ldots$ alkotókat) akarjuk kiküszöbölni, az egyenletet ily alakra hozzuk:

$$(A+a't+at')p_1+(B+b't+bt')p_2+(C+c't+ct')p_3+\cdots=0$$

---

[1] Laws of thought, IX. fej., 8. pont.

úgy, hogy a resultáns:

$$(A+a't+at')(B+b't+bt')(C+c't+ct')+\cdots=0$$

csupán a t ismeretlent és a probléma állandóit (f és φ együtthatóit) tartalmazza. Innen tehát t-t ezen állandók függvényeképen nyerhetjük. Kifejtve ezen egyenlet bal oldalát

$$(A+a')(B+b')(C+c')\ldots\times t+(A+a)(B+b)(C+c)\ldots\times t'=0.$$

És a megoldás

$$t=(A+a)(B+b)(C+c)+\cdots+u(A'a+B'b+C'c+\cdots).$$

A resultáns,

$$ABC\ldots=0$$

a feltétel szerint ki van elégítve, minthogy ez egyszersmind az adott

$$f(x,\ y,\ z,\ldots)=0$$

egyenlet resultánsa.

Látható mostan, hogy ez az egyenlet hogyan járul hozzá a t értéktartományának szűkítéséhez. A míg t csak a φ függvénynyel van értelmezve, az

$$abc\ldots<t=a+b+c+\cdots$$

kettős inclusio határozza meg.

Most azonban, midőn a $f=0$ feltételt is számba veszszük, a következő kettős inclusio határozza meg t-t:

$$(A+a)(B+b)(C+c)\ldots<t<(A'a+B'b+C'c+\cdots).$$ [1]

Az alsó határ csak növekedhetett, a felső csak kisebbedhetett, mert

$$abc\ldots<(A+a)(B+b)(C+c)\ldots$$

és

$$A'a+B'b+C'c+\cdots<a+b+c+\cdots$$

A határok nem változnak, ha $A=B=C=\cdots=0$, azaz, ha az $f=0$ egyenlet azonossággá redukálódik; ez egyébként *a priori* világos.

[1] WHITEHEAD: Universal Algebra, p. 63.

42. Poreczky módszere. BOOLE és SCHRÖDER módszere, melyet eddig kifejtettünk, világosan a közönséges algebra példájára fejlődött. Az algebra megfelelő eljárásához analóg két eljárásban foglalható össze e módszer; az első az egyenletek megoldása az ismeretlenekre vonatkozólag, a másik: az ismeretlenek kiküszöbölése. Logikai szempontból e két eljárás közül mindenesetre a második a fontosabb, sőt BOOLE annyira ment, hogy szerinte a dedukczió lényegileg nem egyéb, mint a *közbenső tagok kiküszöbölése.* Erre a túlságosan egyoldalú felfogásra őt a syllogismus példája csábitotta, hol az eredmény valóban a középső tag kiküszöböléséből származik s a melyet sokáig (helytelenül) a közvetlen dedukczió egyetlen typusának tartották.[1] Annyi bizonyos, hogy BOOLE és SCHRÖDER túlságba vitték a logika algebrája és az algebra közt mutatkozó analógiát. A logikában az ismert és ismeretlen tagok megkülönböztetése mesterkélt és csaknem fölösleges: elvileg minden tag ismeretes és csupán arról van szó, hogy mikép lehet bizonyos megadott összefüggésekből új (azaz ismeretlen vagy explicite nem ismert) összefüggéseket levezetni. Ez a czélja PORECZKY módszerének, melynek ismertetésére most térünk át. Ez három törvényben foglalható össze, ezek: *az alakok törvénye, a következmények törvénye,* és *az okok törvénye.*

43. Az alakok törvénye. Az *alakok törvénye* a következő problémára felel:

Adva lévén egy tetszőleges egyenlőség, egy tetszőleges (egyszerű vagy összetett) tag számára oly meghatározás találandó, mely egyenlő értékű legyen ezen egyenlőséggel. Más szóval ezen egyenlőség mindazon æquivalens *alak*jait keressük, melyekben a bal oldalon egy tetszőleges megadott tag áll.

---

[1] Valóban a kiküszöbölés alapképlete:

$$(ax+bx'=0) < (ab=0),$$

a mint láttuk csupán más alakja és következménye a syllogismus elvének, a mely

$$(b<x<a') < (b<a').$$

Tudjuk, hogy bármely egyenlőség jobb oldalú 0-ra vagy 1-re redukálható, azaz az egyenlőség a következő két æquivalens alak egyikére hozható:

$$N=0, \quad N'=1.$$

Ez az N függvény az, melyet PORECZKY az adott egyenlőség *logikai zérusának* nevez; N' a *logikai mindensége.*[1]

Legyen U egy tetszőleges tag; azt állítjuk, hogy U következő meghatározása

$$U=N'U+NU'$$

egyenlő értékű a kitűzött egyenlőséggel. Valóban, mint tudjuk, egyenlő értékű az

$$(NU+NU'=0)=(N=0)$$

egyenletekkel.

Tudjuk, hogy az

$$U=N'U+NU'$$

meghatározás annyit jelent, hogy U bentfoglaltatik N'-ben és tartalmazza N-et. És ez természetes, mert a feltevés szerint N egyenlő 0-val, N' pedig 1-gyel. Az alakok törvénye tehát a következőképen mondható ki.

Hogy megkapjuk egy adott egyenlőség összes æquivalens alakjait, elég kifejezni azt, hogy egy tetszőleges tag tartalmazza ezen egyenlőség logikai zérusát és bentfoglaltatik logikai mindenségében.

Egy adott egyenlőség alakjainak a száma határtalan: egy tetszőleges tag ezen egyenlőség egy alakjához vezet, mely mind a többitől különböző, minthogy a bal oldal más és más. Ha azonban az ember n egyszerű taggal meghatározott «mindenség»-re szorítkozik, az alakok száma véges és meghatározott lesz. Valóban e határolt mindenségben 2^n számú alkotó van és minden tag, mely e mindenségben felfogható és definiálható, ezen alkotók közül egynéhánynak az összege. Számuk

[1] «Logikai»-nak nevezik az identikus zérustól és mindenségtől való megkülönböztetés végett vagyis annak kiemelésére, hogy e két tag csupán a probléma adatai következtében lesz egyenlő 0-sal, illetve 1-gyel.

tehát megegyezik a 2^n alkotóból képezhető kombinácziók számával, azaz 2^{2^n} (beleértve 0-t, mint 0 számú alkotó kombináczióját és 1-et, mint valamennyi alkotó kombináczióját). Ugyanez tehát a száma a kérdéses mindenségben egy tetszőleges egyenlőség különböző alakjainak.

44. A következmények törvénye. Áttérünk a következmények törvényére. Általánositva Boole felfogását, ki szerint a dedukczió a közbenső tagok kiküszöböléséből áll, Poreczky a dedukcziót, mint *ismeretek kiküszöbölését* tekinti. E felfogás a következő módon magyarázható és igazolható.

Az

$$(A=0)(B=0)(C=0)\ldots=(A+B+C+\cdots=0)$$

képlet alapján [1] minden oly probléma, melynek adatait logikai egyenlőségek vagy inclusiók fejezik ki, *egy* logikai egyenlőségre vezethető vissza.

Ezen, a probléma összes adatait összefoglaló, egyenlőség bal oldalát kifejtjük majd a benne előforduló összes egyszerű tagokra vonatkozólag (tehát most már nem az ismeretlenekre vonatkozólag). Legyen n az egyszerű tagok száma; 1 kifejtésében az alkotók száma 2^n. Legyen $m\,(\leq 2^n)$ azon alkotók száma, melyek az egyenlőség bal oldalán szerepelnek. Ezen egyenlőség összes következményeit nyerjük (a szóban forgó n tag meghatározta mindenségben), ha az m alkotó összes additiv kombinációit egyenlővé teszszük 0-sal; ez az

$$(A+B=0)<(A=0)$$

képlet értelmében történik.

Látjuk tehát, hogy úgy térünk át az egyenlőségről bármely következményére, hogy elhagyunk a bal oldalon egynéhány alkotót, a melyek egy-egy elemi (azaz 0-ra redukált) egyenlő-

---

[1] A nagy betűket összetett tagok (logikai függvények) jelölésére használjuk, ellentétben az egyszerű tagokkal, melyeket kis betűkkel (a, b, c, ...) jelölünk.

ségnek s így a probléma egy-egy adatának felelnek meg. És ez az, a mit úgy fejezünk ki, hogy ismereteket kiküszöbölünk.

Egy egyenlőségből levonható következmények száma (azon n tag meghatározta mindenségben, a melyekre vonatkozólag ki van fejtve) egyenlő az ezen m alkotóból alakítható additiv kombinácziók számával, azaz 2^m. Ebbe bele van értve 0 alkotó kombinácziója, melyből a $0=0$ azonosság származik és mind az m alkotó kombinácziója, mely ismét az adott egyenlethez vezet.

Alkalmazzuk e módszert az általános egy ismeretlennel biró

$$ax+bx'=0$$

egyenletre. Kifejtve a *három* (a, b, x) tagra vonatkozólag:

$$(abx+ab'x+abx'+a'bx'=0)=[ab(x+x')+ab'x+a'bx'=0]=$$
$$=(ab=0)(ab'x=0)(a'bx'=0).$$

Így egyrészt az $ab=0$ resultánst nyerjük, másrészt két egyenlőséget, melyek inclusiókká alakíthatók át:

$$x<a'+b, \quad a'b<x.$$

De a resultáns szerint, mely ugyanannyit mond, mint $b<a'$

$$a'+b=a', \quad a'b=b.$$

Ez a következmény tehát a kettős

$$x'<a', \quad b<x$$

inclusióra redukálódik, azaz az ismert megoldásra.

Alkalmazzuk ugyanezt a módszert a syllogismus præmissáira

$$(a<b)(b<c).$$

Mivelhogy

$$(a<b)=(ab'=0), \quad (b<c)=(bc'=0),$$

ez egyenlőértékű az

$$ab'=bc'=0$$

egyenlőséggel. Keressük ennek összes következményeit.

Kifejtve a, b, c szerint,

$$abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'=0.$$

Ezen négy alkotóból álló egyenlőség következményeinek a száma $2^4=16$. E következmények:

1°. $(abc'=0)=(ab<c)$;
2°. $(ab'c=0)=(ac<b)$;
3°. $(ab'c'=0)=(a<b+c)$;
4°. $(a'bc'=0)=(b<a+c)$;
5°. $(abc'+ab'c=0)=(a<bc+b'c')$;
6°. $(abc'+ab'c'=0)=(ac'=0)=(a<c)$.

Ez a tradiczionális conclusiója a syllogismusnak.[1]

7°. $(abc'+a'bc'=0)=(bc'=0)=(b<c)$.

Ez a második præmissa.

8°. $(ab'c+ab'c'=0)=(ab'=0)=(a<b)$.

Ez az első præmissa.

9°. $(ab'c+a'bc'=0)=(ac<b<a+c)$;
10°. $(ab'c'+a'bc'=0)=(ab'+a'b<c)$;
11°. $(abc'+ab'c+ab'c'=0)=(ab'+ac'=0)=(a<bc)$;
12°. $(abc'+ab'c+a'bc'=0)=(ab'c+bc'=0)=(ac<b<c)$;
13°. $(abc'+ab'c'+a'bc'=0)=(ac'+bc'=0)=(a+b<c)$;
14°. $(ab'c+ab'c'+a'bc'=0)=(ab'+a'bc'=0)=(a<b<a+c)$.

Az utolsó két (15°. és 16°.) következményt 0-számú, illetve valamennyi alkotó kombinácziójával nyerjük; az első a

$$0=0$$

azonosság, a mi megerősíti azt a paradoxonszerű állítást, hogy az igazság (az azonosság) következménye egy tetszőleges állításnak; a második maga az adott egyenlőség, a mely, az azonosság elvének értelmében, valóban önmagának következménye. E két következmény az adott egyenlőség *szélső követ-*

[1] Látnivaló, hogy (a két szélső következményen kívül) ez az egyedüli b-től független következmény; valóban ez tehát a közbenső tag kiküszöbölésének resultánsa.

kezményeinek nevezhető. Ha ezeket ki akarjuk zárni, azt kell mondani, hogy egy m-alkotós egyenlőség szorosabb értelemben vett következményeinek a száma 2^m-2.

45. Az okok törvénye. Egy egyenlőség következményeinek feltalálására szolgáló eljárás módszert mutat *ok*ainak, azaz oly kijelentéseknek feltalálására is, melyeknek az adott egyenlőség következménye. Mivelhogy az okról a következményre úgy térünk át, hogy ismereteket kiküszöbölünk, azaz alkotókat elhagyunk, azért fordítva következményből úgy nyerünk okot, hogy egybekapcsoljuk ismeretekkel, azaz az adott egyenlethez új alkotókat csatolunk. A hozzácsatolható, azaz benne még elő nem forduló alkotók száma 2^n-m. Az összes okokat (a szóban forgó n tag meghatározta mindenségben) úgy nyerjük, hogy ezen alkotók összes additiv kombináczióit képezzük és hozzáadjuk az egyenlőség bal oldalához; ez az általános

$$(A+B=0)<(A=0)$$

képlet értelmében történik, mely azt jelenti, hogy az $A=0$ egyenlőségnek az $(A+B=0)$ egyenlőség oka, bármi is a B. Az így nyerhető okok száma egyenlő a fentemlített kombinácziók számával, azaz

$$2^{2^n-m}.$$

Alkalmazzuk e módszert a syllogismus-præmissák okainak felkeresésére. Láttuk, hogy

$$(a<b)\,(b<c)$$

egyenlőértékű a kifejtett

$$abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'=0$$

egyenlőséggel. A három tag mindenségének nyolcz (2^3) alkotója közül ez az egyenlőség négyet tartalmaz; a többi négy:

$$abc,\quad a'bc,\quad a'b'c,\quad a'b'c'.$$

Ezek kombinácziöinak a száma $2^4=16$, ugyanekkora a száma a keresett okoknak, a melyek a következők:

1°. $(abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'=0)=$
$=(a+bc'=0)=(a=0)(b<c)$;

2°. $(abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'=0)=$
$=(abc'+ab'+a'b=0)=(ab<c)(a=b)$;

3°. $(abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'+a'b'c=0)=$
$=(bc'+b'c+ab'c'=0)=(b=c)(a<b+c)$;

4°. $(abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'+a'b'c'=0)=$
$=(c'+ab'=0)=(c=1)(a<b)$;

5°. $(abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'=0)=$
$=(a+b=0)=(a=0)(b=0)$;

6°. $(abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'+a'b'c=0)=$
$=(a+bc'+b'c=0)=(a=0)(b=c)$;

7°. $(abc+abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'+a'b'c'=0)=$
$=(a+c'=0)=(a=0)(c=1)$;[1]

8°. $(abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'+a'b'c=0)=$
$=(ac'+a'c+ab'c+a'bc'=0)=$
$=(a=c)(ac<b<a+c)=(a=b=c)$;

9°. $(abc'+ab'c+ab'c'+a'bc+a'bc'+a'b'c'=0)=$
$=(c'+ab'+a'b=0)=(c=1)(a=b)$;

10°. $(abc'+ab'c+ab'c'+a'bc'+a'b'c'=0)=$
$=(b'+c'=0)=(b=c=1)$.

Mielőtt tovább haladnánk, megjegyezhetjük, hogy néhány alkotó összegét egyenlővé tenni 0-val ugyanannyit mond, mint 1-gyel egyenlővé tenni a többi alkotó összegét. A négy hiányzó alkotó egyikének elhagyásával keletkező hét alkotó összege helyett tehát azon egyenlőségeket vizsgálhatjuk, melyeket nyerünk, ha ezen alkotók mindegyikét egyenlővé teszszük 1-gyel:

11°. $(a'b'c'=1)=(a+b+c=0)=(a=b=c=0)$:

12°. $(a'b'c=1)=(a+b+c'=0)=(a=b=0)(c=1)$;

13°. $(a'bc=1)=(a+b'+c'=0)=(a=0)(b=c=1)$;

14°. $(abc=1) \qquad =(a=b=c=1)$.

[1] Látjuk, hogy ez az egyedüli ok, mely b-től független és ez esetben valóban b tetszőleges lehet, mindig tartalmazni fogja a-t és bentfoglaltatik c-ben. Hasonlóképen független az 5° ok c-től, a 10° ok a-tól.

A két utolsó (15°. és 16°.) okot úgy nyerjük, hogy az összes hiányzó alkotókat hozzácsatoljuk, illetve egyet sem csatolunk hozzá. Az első esetben, minthogy az összes alkotók összege 1, azt nyerjük, hogy

$$1=0,$$

azaz absurdumot nyerünk és ez megerősíti azt a paradoxonszerű állítást, hogy a hamis (absurdum) maga után von egy tetszőleges állítást (azaz *oka* az utóbbinak); a másik esetben egyszerűen az adott egyenlőséget nyerjük vissza, a mely ily módon (az azonosság elvének értelmében) mint saját magának egyik oka jelentkezik.

Ha e két *szélső ok*tól eltekintünk, a szorosabb értelemben vett okok száma

$$2^{2^n-m}-2.$$

46. A következmények és okok alakjai. Egy adott egyenlőség következményeire és okaira alkalmazható az *alakok törvénye* úgy, hogy mindezek számára az összes lehető alakokat nyerhetjük.

Az

$$N=0, \quad N'=1$$

alakok bármelyikével egyenlőértékű tetszőleges egyenlőség minden következménye ily alakú:[1]

$$NX=0 \quad \text{vagy} \quad N'+X'=1;$$

---

[1] A 44. pontban azt mondtuk, hogy egy következményt úgy nyerünk, hogy az N bal oldal néhány alkotóját veszszük, nem pedig, hogy egy X taggal megszorozzuk. Belátható azonban, hogy ez tulajdonképen egyre megy. Valóban, tegyük fel, hogy X, mint N, ki van fejtve a tárgyalás n tagjára vonatkozólag és így egy bizonyos számú alkotóból áll. Most már N-et X-szel úgy szorozzuk, hogy egyenként összeszorozzuk N minden alkotóját X minden alkotójával. Két azonos alkotó szorzata azonban egyenlő bármelyikükkel, két különböző alkotó szorzata pedig 0. N és X szorzata tehát N és X közös alkotóinak összegére redukálódik, mely természetesen bentfoglaltatik N-ben. E szerint N-et egy tetszőleges taggal megszorozni valóban annyit jelent, mint bizonyos számú (esetleg valamennyi vagy 0-számú) alkotóját venni.

és minden oka

$$N+X=0 \quad \text{vagy} \quad N'X'=1$$

alakú.

És valóban érvényesek a következő formális implikácziók:

$$(N+X=0)<(N=0)<(NX=0),$$
$$(N'X'=1)<(N'=1)<(N'+X'=1).$$

Alkalmazva az alakok törvényét, a következmények képlete így alakul:

$$U=(N'+X')\,U+NXU',$$

az okok képlete pedig ez lesz:

$$U=N'X'U+(N+X)\,U';$$

vagy általánosabban, tekintve, hogy X és X' határozatlan és így nem szükségkép tagadása egyik a másiknak, a következmények képlete:

$$U=(N'+X)\,U+NYU',$$

az okok képlete pedig:

$$U=N'XU+(N+Y)\,U'.$$

Az első azt jelenti, hogy U bentfoglaltatik $N'+X$-ben és tartalmazza $N+Y$-t és valóban ez *a fortiori* következik a feltevésből, mely szerint U bentfoglaltatik N'-ben és tartalmazza N-et.

Hogy tehát egy ($U=N'U+NU'$ alakra hozott) egyenlőség következményeit nyerjük, elegendő logikai mindensége helyébe minden *nagyobb*, logikai zérusa helyébe minden *kisebb* osztályt helyettesíteni. Fordítva, hogy ugyanezen egyenlőség okait nyerjük, elegendő logikai mindensége helyébe minden kisebb, logikai zérusa helyébe minden nagyobb osztályt helyettesíteni. (Akkor mondjuk itt, hogy az a osztály «kisebb» mint a b, ha a bentfoglaltatik b-ben és a «nagyobb» mint b, ha a tartalmazza b-t.)

47. — Példa: Venn problémája. *Egy részvénytársaság igazgatóságának tagjai kötelezvénytulajdonosok vagy részvé-*

nyesek (a ki mind a kettő, nem lehet tag). Továbbá minden kötelezvénytulajdonos tagja az igazgatóságnak. Mi következik ebből?

Legyen a az igazgató-tanács tagjainak, b a kötelezvénytulajdonosoknak és c a részvényeseknek összessége. A probléma adatai tehát:

$$a < bc' + b'c, \quad b < a,$$

melyeket egy kifejtett egyenlőségre redukálunk:

$$a(bc + b'c') = 0, \quad a'b = 0,$$
$$abc + ab'c' + a'bc + a'bc' = 0. \qquad (1)$$

Ez az egyenlőség, mely négy alkotót tartalmaz, egyenlőértékű a következővel, mely a többi négyet tartalmazza:

$$abc' + ab'c + a'b'c + a'b'c' = 1. \qquad (2)$$

Ez az egyenlőség annyi különböző alakra hozható, a hány osztály van a három, a, b, c tag mindenségében. Például:

1°. $$a = abc' + ab'c + a'bc + a'bc',$$
azaz
$$b < a < bc' + b'c;$$

2°. $$b = abc' + ab'c' = ac';$$
3°. $$c = ab'c + a'b'c + ab'c' + a'bc',$$
azaz
$$ab' + a'b < c < b'.$$

Ezek egyébként az (1) egyenlet megoldásai a-ra, b-re, illetve c-re vonatkozólag.

Az (1) egyenlőségből 16 következmény folyik:

1°. $abc = 0$;
2°. $(ab'c' = 0) = (a < b + c)$;
3°. $(a'bc = 0) = (bc < a)$;
4°. $(a'bc' = 0) = (b < a + c)$;
5°. $(abc + ab'c' = 0) = (a < bc' + b'c)$ [az első præmissa];
6°. $(abc + a'bc = 0) = (bc = 0)$;
7°. $(abc + a'bc' = 0) = (b < ac' + a'c)$;

8°. $(ab'c'+a'bc=0)=(bc<a<b+c)$;
9°. $(ab'c'+a'bc'=0)=(ab'+a'b<c)$;
10°. $(a'bc+a'bc'=0)=(a'b=0)$ [a második præmissa];
11°. $(abc+ab'c'+a'bc=0)=(bc+ab'c'=0)$;
12°. $(abc+ab'c'+a'bc'=0)$;
13°. $(abc+a'bc+a'bc'=0)=(bc+a'bc'=0)$;
14°. $(ab'c'+a'bc+a'bc'=0)$.

Az utolsó két következmény, mint tudjuk, a $(0=0)$ azonosság és maga az (1) egyenlőség. Megemlítjük még, hogy a megelőző következmények közül a 6.-ik $bc=0$ az a és a 10.-ik $(ab'=0)$ a c kiküszöbölésének resultánsa. A mi a b kiküszöbölésének resultánsát illeti, ez az

$$[(a'+c)\,ac'=0]=(0=0)$$

azonosság.

Végül az (1) vagy az æquivalens (2) egyenlőség 16 oka:

1°. $(abc'=1)=(a=1)(b=1)(c=0)$;
2°. $(ab'c=1)=(a=1)(b=0)(c=1)$;
3°. $(a'b'c=1)=(a=0)(b=0)(c=1)$;
4°. $(a'b'c'=1)=(a=0)(b=0)(c=0)$;
5°. $(abc'+ab'c=1)=(a=1)(b'=c)$;
6°. $(abc'+a'b'c=1)=(a=b=c')$;
7°. $(abc'+a'b'c'=1)=(c=0)(a=b)$;
8°. $(ab'c+a'b'c=1)=(b=0)(c=1)$;
9°. $(ab'c+a'b'c'=1)=(b=0)(a=c)$;
10°. $(a'b'c+a'b'c'=1)=(a=0)(b=0)$;
11°. $(abc'+ab'c+a'b'c=1)=(b=c')(c'<a)$;
12°. $(abc'+ab'c+a'b'c'=1)=(bc=0)(a=b+c)$;
13°. $(abc'+a'b'c+a'b'c'=1)=(ac=0)(a=b)$;
14°. $(ab'c+a'b'c+a'b'c'=1)=(b=0)(a<c)$.

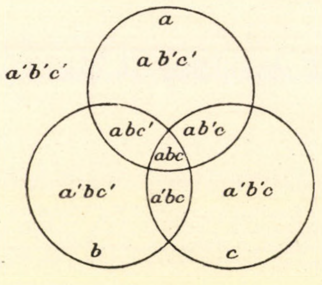
Tudjuk, hogy az utolsó két ok maga az (1) egyenlőség és az absurdum $(1=0)$. Látjuk, hogy az a-tól független ok a 8.-ik $(b=0)(c=1)$, és a c-től független ok a 10.-ik $(a=0)(b=0)$; b-től független (szorosabb értelemben vett) ok nincs. A «legtermészetesebb» ok, melyet egyszerű józan gondolkodással először találunk, a 12.-ik:

$$(bc=0)(a=b+c).$$

De több más ok ép oly lehetséges, például a 9.-ik: $(b=0)(a=c)$, a 7.-ik: $(c=0)(a=b)$ vagy a 13.-ik $(ac=0)(a=b)$.

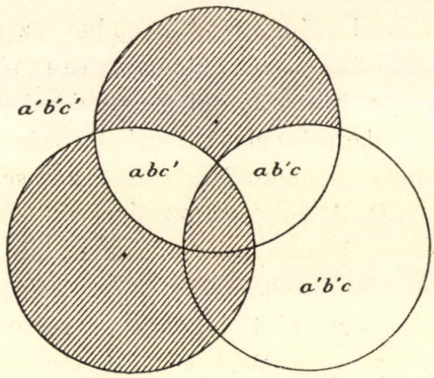
Látjuk, hogy ez a módszer az összes lehető esetek teljes felsorolását szolgáltatja. Egy egyenlőség *alakjai* közé sorozza jelesen az egyes «változók»-ra vonatkozólag nyerhető megoldásokat és egy egyenlőség *következményei* közé az egyes tagok kiküszöbölésének a resultánsait.

48. Venn geometriai ábrái. Poreczky módszere mint Stanley, Jevons és Venn módszereinek tökéletesbítése tekinthető és ezek viszont Poreczky módszerének geometriai és mechanikai megvilágítását adják. Valóban Venn módszere oly geometriai beosztással érzékithető, mely az összes alkotókat ábrázolja; az eredményt egyszerűen úgy nyerjük, hogy (például sraffirozással) megjelöljük (kitörüljük) azokat, melyek a probléma adatai szerint eltűnnek. Így például a három, a, b, c tagnak — a határtalan síkkal ábrázolt — mindenségét három egyszerű zárt vonal nyolcz részre osztja, a mely nyolcz rész, mint a nyolcz alkotó szerepel. (1. ábra.)



1. ábra.

A Venn-probléma adatainak geometriai ábrázolása czéljából az abc, $ab'c'$, $a'bc$ és $a'b'c'$ területeket kell kitörülni; megmarad tehát az abc', $ab'c$, $a'b'c$ és $a'b'c'$ terület, melyek a *problémára vonatkozó* mindenséget, Poreczky *logikai mindenségét* alkotják. (2. ábra.) Most már tehát minden osztály bentfoglaltatik ebben a mindenségben és ennek alapján felírhatjuk minden osztály számára a probléma adataiból számára kiadódó kifejezést. Ily módon az ábra egyszerű megtekintése mutatja, hogy bc terület nem létezik (ki van törülve), hogy a b terület *abc'*-re (és így *ab*-re) redukálódik, hogy minden *a*: vagy *b* vagy *c* és így tovább. Ámde e módszernek, mint logikai problémák megoldására szolgáló módszernek, nagy hiányai is vannak: nem mondja meg, hogy az adatok mikép fejezhetők ki bizonyos alkotók eltünésével; sem pedig azt, hogy mikép kell az alkotókat kombinálni, hogy a keresett következményeket nyerjük. Végeredményben az okoskodásnak csupán egy lépését, a probléma egyenletét érzékíti és nem teszi fölöslegessé sem a megelőző lépéseket, t. i. a probléma «egyenletbe foglalását» és a præmissák átalakitását, sem pedig a későbbi lépéseket, t. i. az alkotók czélszerű kombináczióját. E módszer haszna igen csekély tehát; hiszen az algebrai jelek ép oly jól ábrázolják az alkotókat, mint a sík területei, sőt algebrai alakjukban még sokkal jobban kezelhetők.



2. ábra.

49. Jevons logikai gépe. Venn e geometriai ábrákat oly mechanikai kombinráczióval képzelte jobban kezelhetővé tenni, mely lesülyesztené és eltüntetné a síknak kitörlendő területeit. Tökéletesebb mechanismust talált ki Jevons, mely bizonyos tekintetben *logikai zongorá*nak nevezhető. Ezen eszköz billentyűi a különböző egyszerű tagokat (*a*, *b*, *c*, *d*), tagadásukat és a + és = jeleket jelölik. Az eszköz másrészt egy táblázatot tartalmaz, a melyen kis mozgatható táblákra fel van írva az egyszerű tagoknak és tagadásuknak minden kombinácziója, azaz a szóban forgó mindenség minden alkotója. A helyett most már, hogy felírnók a præmissákat kifejező egyenlőségeket, «eljátszszuk» őket a billentyűkön, mint valami írógépen. Ennek az a következménye, hogy a táblázatról eltűnnek azok az alkotók, melyek a præmissák folytán 0-sal egyenlők. Ha az ember eljátszotta az összes præmissákat, akkor a táblázat már csak azokat az alkotókat tartalmazza, a melyeknek összege 1, azaz a melyek a problémára vonatkozó mindenséget (logikai mindenségét) alkotják. E mechanikai módszernek VENN geometriai módszerével szemben az az előnye, hogy az «egyenletbe foglalás»-t automatikusan végzi (itt is előbb egyenlőségekkel kell kifejezni a præmissákat), de a táblára kiírt adatok következményeinek meghatározása czéljából végzendő műveletekre vonatkozólag e módszer sem ád utasítást.

50. A következmények táblázata. De PORECZKY módszere, jobban mint e geometriai és mechanikai eljárásokkal, oly táblázat készitésével érzékíthető, melyből azonnal kiolvasható egy adott egyenlőség minden oka és minden következménye (a táblázat e meghatározott egyenlőségre vonatkozik; más és más egyenlőséghez más és más táblázat tartozik). Minden táblázat azt a 2^n osztályt tartalmazza, a mely a szóban lévő n tag mindenségében definiálható és megkülönböztethető. Tudjuk, hogy egy egyenlőség ezen osztályok egynémelyikének eltűnését fejezi ki, t. i. azokét, a melyeknek alkotói egyszersmind *logikai zérusának*, N-nek is alkotói. Ez utóbbiak száma legyen m, N részletosztályainak száma tehát 2^m és így ugyanez a száma a mindenség azon osztályainak, melyek a tárgyalt egyenlőség következtében eltűnnek. Írjuk ezeket egy oszlopba, mely 0-sal kezdődik és N-nel végződik (ez a két szélső következmény). Minthogy ezen osztályok (a tárgyalt probléma esetében) 0-sal egyenlők, azért bármelyikük hozzáadható bármely osztályhoz, a nélkül, hogy az utóbbiak értékét megváltoztatnák. Ily módon minden osztály, a probléma adatai értelmében, egyenlő 2^m számú osztálylyal (önmagát is beleértve) és a tárgyalás 2^n számú osztályának összessége 2^{n-m} számú, 2^m osztályt tartalmazó sorozatra bomlik oly módon, hogy minden sor egy bizonyos osztálynak és az első oszlop (N alosztályainak) 2^m számú osztályának összegeiből áll. Ez a 2^m összeg tehát a következő oszlopokba rendezhető, mindegyikük az első oszlop azon osztályával kerülvén egy sorba, a melyből származik. Tekintsük például az egyszerű $a=b$ egyenlőséget, mely egyenlőértékű evvel:

$$ab'+a'b=0.$$

A logikai zérus (N) ez esetben $ab'+a'b$; két alkotóból áll és igy négy osztálya van: 0, ab', $a'b$, $ab'+a'b$. Ezek alkotják majd az első oszlopot. A tárgyalás többi osztályai: ab, $a'b'$, $ab+a'b'$ és azok az osztályok, melyek ezekből az első oszlop négy osztályának hozzáadásával nyerünk. Így a következő táblázatot nyerjük:

0	ab	$a'b'$	$ab+a'b'$
ab'	a	b'	$a+b'$
$a'b$	b	a'	$a'+b$
$ab'+a'b$	$a+b$	$a'+b'$	1.

E táblázat úgy van szerkesztve, hogy minden benne szereplő osztály összege az ugyanazon sor és ugyanazon oszlop első osztályának és egyenlő — a probléma adatai értelmében — ugyanazon oszlop minden osztályával. Egy két tagot tartalmazó egyenlőség számára így 64 különböző következményt nyerünk; ebből 16: azonosság (mely az egyes osztályok önmagukkal való egyenlőségét fejezi ki), más 16 pedig az adott egyenlőség különböző alakja, melyeket úgy nyerünk, hogy minden sorban megfelelő osztályokat egyenlővé teszünk oly osztalyokkal, melyekről tudjuk, hogy velük egyenlők, t. i.

$$0=ab'+a'b,\quad ab=a+b,\quad a'b'=a'+b',\quad ab+a'b'=1;$$
$$a=b,\quad b'=a',\quad ab'=a'b,\quad a+b'=a'+b.$$

E nyolcz egyenlőség mindegyike kettőnek számít, mert valamennyi egyrészt, mint a jobb, másrészt mint a bal oldal meghatározása tekinthető.

51. Az okok táblázata. A következő tétel értelmében ugyanez a táblázat az előbbi egyenlet összes okainak ábrázolására is alkalmas:

Ha egy $N=0$ egyenlőség következményei egy tetszőleges

U osztály meghatározásaiképen vannak kifejezve, ezen egyenlőség okait az *ellenkező* egyenlet, $N=1$ (ugyanily alakra hozott) következményeiből nyerhetjük; t. i. úgy, hogy valamelyik oldalon U-t U'-vel cseréljük fel.

Valóban tudjuk, hogy az $N=0$ egyenlőség következményeinek alakja:

$$U=(N'+X)\,U+NYU'\,;$$

okainak alakja pedig

$$U=N'XU+(N+Y)\,U'.$$

Ha most már ez utóbbi képletben az egyik oldalon U-t U'-vel cseréljük fel, ez a következő alakot nyeri:

$$U=(N+X')U+N'Y'U'$$

és itt X' és Y' helyébe X, Y írható, hiszen e két betű határozatlan osztályokat jelöl. És ez az $N'=0$ vagy $N=1$ egyenlőség következményeinek képlete.

Bebizonyítván e tételt, alkossuk meg például az $a=b$ egyenlőség okainak táblázatát; ez egyszerűen az ellenkező egyenlet: $a=b'$ következményeinek táblázata lesz, minthogy az első az

$$ab'+a'b=0$$

a második pedig az

$$(ab+a'b'=0)=(ab'+a'b=1)$$

egyenlőséggel egyenlőértékű. E táblázat:

0	ab'	$a'b$	$ab'+a'b$
ab	a	b	$a+b$
$a'b'$	b'	a'	$a'+b'$
$ab+a'b'$	$a+b'$	$a'+b$	$1.$

Hogy e táblázatból az $a=b'$ egyenlőség következményei helyett az ellenkező, $a=b$ egyenlet okait nyerjük, minden egyes osztály *tagadását* egyenlővé teszszük a vele egy oszlopban szereplő minden egyes osztálylyal.

Példák:

$$a'+b'=0,\quad a'+b'=a'b',\quad a'+b'=ab+a'b';$$

$$a'+b=a,\quad a'+b=b',\quad a'+b=a+b';\ldots$$

A szóban lévő egyenlőség 64 oka közt szerepel 16 «absurdum» (ezek a táblázatban szereplő osztályoknak tagadásukkal való egyenlőségét fejezik ki) és az egyenlőség 16 különböző alakja (ezek természetesen ugyanazok, mint a következmények táblázatában: egyenlőértékű egyenlőségek valóban egyidejűleg okai és következményei egymásnak).

Látnivaló, hogy az okok táblázata csak annyiban különbözik a következmények táblázatától, hogy ennek a fődiagonálisra (0, 1) vonatkozó tükörképe; ezek tehát azonosíthatók, ha csak a megelőző kijelentésben az *oszlop* szót a *sor* szóval helyettesítjük. És valóban, a következmények szabálya csak ugyanazon oszlop osztályaira vonatkozik és így a sorokba való helyezésről úgy rendelkezhetünk, hogy az egy sorban lévő osztályok kielégítsék az okokra vonatkozó szabályt.

Látjuk továbbá, hogy a táblázat szerkesztése értelmében, azon osztályok, melyek egymásnak tagadásai, a táblázat középpontjára vonatkozólag symmetrikusan helyezkednek el.

Ezért az első sorban N'-nek (az adott egyenlőség logikai mindenségének vagyis az ellenkező egyenlet logikai zérusának) alosztályait kell természetes sorrendben, 0-tól N'-ig elhelyezni és azután minden egyes helyre az illető sor és oszlop első első helyén álló osztályainak összegét írjuk.

Ilyen módon a két szabály a következő praktikus utasításban egyesíthető.

Az adott egyenlőségnek (melyre a táblázat vonatkozik) úgy nyerjük összes következményeit, hogy a táblázatban szereplő valamennyi osztályt egyenlővé teszszük ugyanazon oszlop minden osztályával; az összes okokat pedig úgy nyerjük, hogy minden egyes osztályt a sorához symmetrikusan fekvő sor osztályaival teszszük egyenlővé.

Világos, hogy az $N=0$ egyenlőségre vonatkozó táblázat az ellenkező $N=1$ egyenlőségre is alkalmazható, csak a sor és oszlop szót kell a megelőző kijelentésben felcserélni.

Megjegyzendő, hogy egy egyenlethez tartozó táblázat megszerkesztése csak akkor hasznos és előnyös, ha ezen egyenlőség következményeit vagy okait teljesen fel akarjuk sorolni. Ha *egy bizonyos* következményt vagy okot keresünk, mely a tárgyalás egy meghatározott osztályára vonatkozik, a fentebb adott képletek valamelyikét használjuk.

52. A lehetséges állítások száma. Ha a logikai függvényeket és egyenleteket az *összes* betűk szerint kifejtve képzeljük, kiszámítható az n egyszerű tagra vonatkozó különböző állítások és problémák száma. Valóban minden így kifejtett függvény az alkotókat csak az 1 vagy a 0 együtthatóval tartalmazhatja (ebben a második esetben nem tartalmazza) és így ezen minden ily függvény ezen alkotóknak additiv kombinácziója, minthogy pedig az alkotók száma 2^n, azért a lehetséges függvények száma 2^{2^n}. Leszámítandó innen az a függvény, melyből valamennyi alkotó hiányzik és a mely azonosan 0; megmarad így $2^{2^n}-1$ lehetséges egyenlet ($n=3$ esetében: 255). Ezek az egyenletek azonban még logikai összeadással (alternativa) kombinálhatók és e kombinácziók száma — ismét leszámítva a zérus kombinácziót — $2^{2^{2^n}-1}$.

Ez az n tagra vonatkozó lehetséges állítások száma. Már $n=2$ esetében e szám 32767.[1] Megjegyzendő még, hogy e számítás csak általános præmissákra vonatkozik. Hogy ez mit jelent, azt a következő pontban magyarázzuk meg.

53. Részleges kijelentések. Eddig csupán *állító* kijelentést (inclusiót vagy egyenlőséget) tárgyaltunk; ezek a klasszikus logikában az *egyetemes* kijelentéseknek felelnek meg.[2]

[1] G. PEANO: *Calcolo geometrico* (1888), p. X. — SCHRÖDER: Algebra der Logik, II. kötet, p. 144–148.

[2] Valóban az *egyetemes állítást:* «Minden a egyszersmind b» e képletek fejezik ki:

$$(a<b)=(a=ab)=(ab'=0)=(a'+b=1)$$

és az *egyetemes tagadást:* «Egy a sem b», ezek

$$(a<b')=(a=ab)=(ab=0)=(a'+b'=1).$$

Hátra volna még a *tagadó* kijelentések (non-inclusiók és egyenlőtlenségek) tárgyalása, melyek részleges kijelentéseket fejeznek ki; [1] de a tagadó kijelentésekre vonatkozó kalkulus immár ismert törvényekből, jelesen De Morgan képleteiből és a contrapositio törvényéből folyik. Felsoroljuk az ezekből levezethető fő képleteket.

Az összetevés elve a következő képleteket vonja maga után

$$(c \nless ab) = (c \nless a) + (c \nless b),$$
$$(a + b \nless c) = (a \nless c) + (b \nless c),$$

és innen speciálisan

$$(ab \neq 1) = (a \neq 1) + (b \neq 1),$$
$$(a + b \neq 0) = (a \neq 0) + (b \neq 0).$$

Innen a következő fontos implikácziók folynak:

$$(a \neq 0) < (a + b \neq 0),$$
$$(a \neq 1) < (ab \neq 1).$$

A syllogismus elvéből kifolyólag pedig, a transpositio törvénye értelmében

$$(a < b)\,(a \neq 0) < (b \neq 0),$$
$$(a < b)\,(b \neq 1) < (a \neq 1).$$

Az inclusiók és egyenlőségek átalakítására szolgáló képletek megfelelő képleteket adnak non-inclusiók és egyenlőségek átalakítására:

$$(a \nless b) = (ab' \neq 0) \qquad = (a' + b \neq 1),$$
$$(a \neq b) = (ab' + a'b \neq 0) = (ab + a'b' \neq 1).$$

---

[1] Valóban a *részleges állítást:* «Néhány a egyszersmind b», az egyetemes tagadás tagadása lévén, e képletek fejezik ki

$$(a \nless b') = (a \neq ab') = (ab \neq 0) = (a' + b') \neq 1)$$

és a *részleges tagadást:* «Néhány a nem b», mivelhogy ez az egyetemes állítás tagadása, ezek:

$$(a \nless b) = (a \neq ab) = (ab' \neq 0) = (a' + b \neq 1).$$

54. Egy ismeretlennel biró egyenlőtlenség megoldása. Tekintsük az egy ismeretlennel biró (az egyenletnek megfelelő)

$$ax+bx'\neq 0$$

feltételes egyenlőtlenséget; tudjuk, hogy a bal oldal bentfoglaltatik együtthatóinak összegében:

$$ax+bx'<a+b.$$

Ha tehát az egyenlőtlenség ki van elégitve,

$$a+b\neq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség megoldhatóságának szükséges feltétele és az x ismeretlen kiküszöbölésének resultánsa. Valóban, minthogy érvényes a

$$\prod_x (ax+bx'=0)=(a+b=0)$$

æquivalenczia, azért contrapositióval nyerjük, hogy

$$\sum_x (ax+bx'\neq 0)=(a+b\neq 0).$$

Ép igy a

$$\sum_x (ax+bx'=0)=(ab=0)$$

æquivalencziából folyik, hogy

$$\prod_x (ax+bx'\neq 0)=(ab\neq 0),$$

a mi azt jelenti, hogy

$$(ab\neq 0)$$

a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az egyenlőtlenség mindig igaz legyen. És ez esetben valóban tudjuk. hogy az

$$ax+bx'=0$$

egyenlet lehetetlen (sohasem igaz).

Minthogy egyébként

$$(ax+bx'=0)=(x=a'x+bx'),$$

azért egyszersmind

$$(ax+bx'\neq 0)=(x\neq a'x+bx').$$

Mit jelent az

$$(ax+bx'\neq 0)=(ax\neq 0)+(bx'\neq 0)=(x\nless a')+(b\nless x)$$

megoldás? «Az x vagy nem foglaltatik bent a'-ben, vagy nem tartalmazza b-t».

És ez egyszerűen a

$$b<x<a'$$

kettős inclusio tagadása.

A mint több egyenlőség szorzata egyetlen egy egyenletre vezet, ép úgy több egyenlőtlenség összege (alternativája) egy egyenlőtlenséggel pótolható. De sem több alternativ egyenlőség, sem több szimultán egyenlőtlenség nem pótolható egygyel.

55. Egy egyenletből és egy egyenlőtlenségből álló rendszer. Egy egyenlet és egy egyenlőtlenség egyidejű fennállásának esetére szorítkozunk most. Legyen például a két præmissa:

$$(ax+bx'=0)\,(cx+dx'\neq 0).$$

Hogy az első (az egyenlet) lehetséges legyen, szükséges, hogy resultánsa,

$$ab=0$$

ki legyen elégítve. Ezen egyenlet megoldása

$$x=a'x+bx'.$$

Behelyettesítve e kifejezést (mely egyenlőértékű az egyenlettel) az egyenlőtlenségbe:

$$(a'c+ad)\,x+(bc+b'd)\,x'\neq 0.$$

Resultánsa (megoldhatóságának feltétele):

$$(a'c+ad+bc+b'd\neq 0)=[(a'+b)\,c+(a+b')\,d\neq 0].$$

És ez, tekintetbe véve az egyenlőség resultánsát, a mely

$$(ab=0)=(a'+b=a')=(a+b'=b'),$$

a következőre redukálódik:

$$a'c+b'd\neq 0.$$

Ugyanezen eredményhez jutunk, ha megjegyezzük, hogy az egyenlőség egyenlőértékű a következő két inclusióval

$$(x<a')(x'<b'),$$

mindkettőnek két oldalát megszorozva ugyanazon taggal

$$(cx<a'c)(dx'<b'd)<(cx+dx'<a'c+b'd),$$
$$(cx+ax'\neq 0)<(a'c+b'd\neq 0).$$

E resultáns maga után vonja az önmagában tekintett egyenlőtlenség resultánsát, a mely

$$c+d\neq 0,$$

úgy, hogy ezt nem is kell tekintetbe venni. Hozzávéve tehát az egyenlőség resultánsát, az egész szóban lévő rendszer resultánsát nyerjük:

$$(ab=0)(a'c+b'd\neq 0).$$

Az átalakított egyenlőtlenség megoldása (a mely tehát magában foglalja az egyenlőség megoldását):

$$x\neq(a'c'+ad')x+(bc+b'd)x'.$$

56. Tételek, melyek csak kijelentésekkel való kalkulusra vonatkoznak. Az eddig előfordult képletek egyaránt érvényesek kijelentésekre és fogalmakra. Most egy sorozat oly képletet fogunk kifejteni, melyek csupán kijelentésekre érvényesek, minthogy valamennyien egy a kijelentésekre vonatkozó kalkulusra jellemző axiomából folynak. Ez az axioma, melyet az *állítás elvének* nevezhetünk, a következő:

X. $$(a=1)=a.$$

K. I.: Azt mondva, hogy egy a kijelentés igaz, magát e kijelentést állítjuk. Más szavakkal, egy kijelentést állítva annak igazságát állítjuk.[1]

Következmény:

$$a'=(a'=1)=(a=0).$$

K. I.: Egy kijelentés tagadása egyenlőértékű annak kijelentésével, hogy e kijelentés hamis.

A IX. axioma (20. pont) értelmében

$$(a=1)(a=0)=0.$$

«Egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz és hamis», mert

(Syll.) $$(a=1)(a=0)<(1=0)=0.$$

A X. axioma szerint továbbá

$$(a=1)+(a=0)=a+a'=1.$$

«Egy kijelentés vagy igaz, vagy hamis».

Egyesítve e két képletet azt találjuk, hogy az $(a=1)$ és $(a=0)$ kijelentések egymás ellentétjei, azaz

$$(a\neq 1)=(a=0), \quad (a\neq 0)=(a=1).$$

A kalkulus szempontjából a X. axioma minden oly egyenlőséget, melynek jobb oldala 1, bal oldalára redukál és lehetővé teszi az egyenlőtlenségeknek egyenlőségekké való átalakitását, feltéve, hogy ezeknek tagjai kijelentéseket jelölnek. Mindazonáltal érvényes marad osztályokra is e fejezet minden képlete azon speczialis esetben, midőn a tárgyalás mindensége csak egy elemet tartalmaz: mert ekkor csak két osztály létezik: 0 és 1. Szóval e kijelentésekre vonatkozó ezen speczialis kalkulus egyenlőértékű az osztálykalkulussal, ha az osztályok csak két értéket, 0 t és 1-et vehetnek fel.

[1] Világos, hogy e képletnek nincs F. I.-ja: mert, ha a: fogalom, akkor is $(a=1)$ kijelentés s igy egy fogalom és egy kijelentés logikai egyenlőségét (azonosságát) fejeznők ki, a mi absurdum.

57. Bizonyos implikáczió és alternativa æquivalencziája. Az alapvető

$$(a<b)=(a'+b=1)$$

æquivalenczia a X. axioma folytán a következő alakot nyeri:

$$(a<b)=(a'+b),$$

mely nem kevésbé alapvető a kijelentési kalkulusban; «a implikálja b-t» ugyanazt mondja, mint «non-a vagy b», azaz: «vagy a hamis, vagy b igaz». A mindennapi nyelv is gyakran alkalmazza ezt az æquivalencziát.

Következmény. Egy tetszőleges egyenlőségre érvényes a következő æquivalenczia:

$$(a=b)=ab+a'b'.$$

Bizonyítás:

$$(a=b)=(a<b)(b<a)=(a'+b)(b'+a)=ab+a'b'.$$

«Azt állítva, hogy két kijelentés egyenlő (egyenlő értékű) azt állítjuk, hogy mind a kettő igaz vagy mind a kettő hamis». Az imént nyert alapvető æquivalencziának fontos következményei vannak, a melyeket most fel akarunk sorolni.

Először is segitségével másodrendű, harmadrendű stb. kijelentéseket elsőrendűekre vezethetünk vissza, vagy még tovább elemi kijelentések összegére (alternativájára). Ezen æquivalenczia alapján valóban egy tetszőleges kijelentésből eltüntethető a fő ($=$ vagy $<$) jel, miáltal a rendszám 1-gyel lejebb száll. Az $(A<B)$ implikáczió, hol A és B többé-kevésbé összetett kijelentéseket jelöl, az $(A'+B)$ összegre redukálódik, hol már csak A-n és B-n belül fordul elő $=$ vagy $<$ jel és így a rendszám 1-gyel kisebb. Az $(A=B)$ egyenlőség pedig az $(AB+A'B')$ összegre lesz visszavezetve, mely ugyancsak 1-gyel kisebbrendű.

Tudjuk, hogy az összetevés elve alapján több *szimultán* inclusio vagy egyenlőség egyesithető, de *alternativ* inclusiók vagy egyenlőségek nem egyesithetők, vagy legalább is az eredmény nem lesz egyenlőértékű az alternativával, hanem ennek csupán következménye. Egy szóval csupán az

$$(a<c)+(b<c)=(ab<c),$$
$$(c<a)+(c<b)=(c<a+b)$$

implikácziók érvényesek, melyek a speczialis $c=0$, $c=1$ esetben az

$$(a=0)+(b=0)<(ab=0),$$
$$(a=1)+(b=1)<(a+b=1)$$

alakot nyerik, de az osztálykalkulusban a fordított implikácziók nem érvényesek. Valóban abból, hogy $ab=0$, nem következik a vagy b eltűnése (lehetnek 0-tól különbözők a mellett, hogy nincs közös elemük) és abból, hogy $a+b=1$, nem következik, hogy a vagy b egyenlő 1-gyel (a két osztály *együtt* kimeritheti a mindenséget, a nélkül, hogy valamelyikük magában kimeritené). De a kijelentési kalkulusban e fordított implikácziók is érvényesek:

$$(ab<c)<(a<c)+(b<c),$$
$$(c<a+b)<(c<a)+(c<b);$$

miután folyományai a fenti æquivalencziának. Sőt mindjárt a megfelelő egyenlőségeket vezethetjük le:

$$(ab<c)=(a<c)+(b<c), \quad (1)$$
$$(c<a+b)=(c<a)+(c<b). \quad (2)$$

Bizonyítás:

1°. $(ab<c)=a'+b'+c,$

$(a<c)+(b<c)=(a'+c)+(b'+c)=a'+b'+c;$

2°. $(c<a+b)=c'+a+b,$

$(c<a)+(c<b)=(c'+a)+(c'+b)=c'+a+b.$

Azon speczialis esetben, midőn $c=0$, illetve $c=1$:

$$(ab=0)=(a=0)+(b=0), \quad (3)$$
$$(a+b)=1=(a=1)+(b=1). \quad (4)$$

K. I.: (1). Hogy két kijelentés együtt maga után von egy harmadikat, ugyanazt jelenti, mint az, hogy egyikük e harmadikat maga után vonja.

(2). Hogy egy kijelentés maga után vonja két kijelentés alternativáját, ugyanannyit mond, mint az, hogy e kettő valamelyikét maga után vonja.

(3). Hogy két kijelentés együtt hamis, azt mondja, hogy valamelyikük hamis.

(4). Hogy két kijelentés alternativája igaz, azt mondja, hogy valamelyikük igaz.

E tételek közül az első hármat paradoxonszerűnek fogjuk találni ellentétben az evidens negyedikkel. E paradoxonokat egyrészt az a speczialis axióma magyarázza meg, mely szerint egy kijelentés vagy igaz, vagy hamis, másrészt pedig az a tény, hogy a hamis maga után vonja az igazat és *csak* a hamisat nem vonja maga után az igaz.

Például az (1) tételben, ha a két præmissa igaz, mindegyikük maga után vonja a következményt; ha az egyik hamis, ez maga után vonja a következményt (a mely lehet igaz is, hamis is). A (2) tételben, ha az alternativa igaz, egyik tagjának igaznak kell lennie és így ezt, úgy mint az alternativát, az (igaz vagy hamis) præmissa maga után vonja. Végül (3)-ban két kijelentés szorzata csak akkor lehet hamis, ha egyikük hamis; mert ha mindkettő igaz volna, a szorzat is igaz $(=1)$ volna.

58. Az importáczió és exportáczió törvénye. Az alapvető $(a<b)=a'+b$ æquivalencziának még sok érdekes következménye van. Egyike a legfontosabbaknak az *importáczió és exportáczió törvénye,* melyet a következő képlet fejez ki:

$$[a<(b<c)]=(ab<c).$$

«Azt mondva, hogy ha a igaz, b maga után vonja c-t, azt állítjuk, hogy a és b maga után vonja c-t». Ezen egyenlőség két inverz implikácziót tartalmaz: ha az első tagból következtetünk a másodikra, akkor beviszszük *(importáljuk)* az a feltételt a $(b<c)$ implikáczióba; ha a másodikból következtetünk az első tagra, akkor az $(ab<c)$ implikáczióból kiviszszük *(exportáljuk)* az a feltételt.

Bizonyítás:

$$[a<(b<c)]=a'+(b<c)=a'+b'+c,$$
$$(ab<c)=(ab)'+c=a'+b'+c.$$

Következmények. 1°. Először is világos, hogy

$$[a<(b<c)]=[b<(a<c)],$$

minthogy a szorzás commutativ elve értelmében mindkét oldal $(ab<c)$-vel egyenlő.

2°. Továbbá

$$[a<(a<b)]=(a<b),$$

mert az importáczió és exportáczió törvénye szerint

$$[a<(a<b)]=(aa<b)=(a<b).$$

Ha az importáczió törvényét a következő két képletre alkalmazzuk:

$$(a<b)<(a<b),\quad (a<b)<(b'<a'),$$

melyek közül az első az azonosság elvéből következik s a második a contrapositio elvét fejezi ki, a következő két képletet nyerjük:

$$(a<b)\,a<b,\quad (a<b)\,b'<a',$$

mely a *feltételes okoskodás* két typusa: «Ha a maga után vonja b-t és a igaz, akkor b igaz» *(modus ponens).* «Ha a maga után vonja b-t és b hamis, akkor a hamis» *(modus tollens).*

Megjegyzés. E két képlet közvetetlenül levezethető az állítás elvének alapján a következőkből:

$$(a<b)\,(a=1)<(b=1),$$
$$(a<b)\,(b=0)<(a=0),$$

melyek függetlenek az importáczió törvényétől és a syllogismus elvéből folynak.

Ugyancsak az importáczió törvényéből több paradoxonszerű képlet következik:

1°. $a<(b<a),\quad a'<(a<b).$

«Ha a igaz, egy tetszőleges b kijelentés maga után vonja; ha a hamis, egy tetszőleges b kijelentést maga után von». Ez megfelel a 0 és 1 ismert tulajdonságainak.

2°. $a<[(a<b)<b], \quad a'<[(b<a)<b']$.

«Ha a igaz, «a maga után vonja b-t» maga után vonja b-t; ha a hamis, akkor «b maga után vonja a-t» maga után vonja non-b-t».

E két képlet más alakja a feltételes okoskodásnak (*modus ponens* és *modus tollens*).

3°. $[(a<b)<a]=a,$[1] $\quad [(b<a)<a']<a'$.

Azt mondva, hogy a igaz, ha a maga után vonja b-t, a-t állítjuk; azt mondva, hogy a hamis, ha b maga után vonja a t. a-t tagadjuk.

Bizonyítás:

$$[(a<b)<a]=(a'+b<a)=ab'+a=a,$$
$$[(b<a)<a']=b'+a<a'=a'b+a'=a'.$$

Az 1°. és 3°. képletbe, hol b tetszőleges, bevezethetnők b-re vonatkozólag a Π jelt. A következő képletben e jel használata szükséges:

4°. $\prod_x \{[a<(b<x)]<x\}=ab.$

Bizonyítás:

$$\{[a<(b<x)]<x\}=\{[a'+(b<x)]<x\}=[(a'+b'+x)<x]=$$
$$=abx'+x=ab+x.$$

Most még a $\prod_x (ab+x)$ szorzatot kell megalkotni, hol x minden értéket felvehet, beleértve 0-t és 1-et. De világos, hogy az $ab+x$ alakú tagok közös része csak ab lehet. Valóban: 1°. ab bentfoglaltatik minden $(ab+x)$ összegben és így közös részükben is; 2°. az összes $(ab+x)$ összegek közös

---

[1] E képlet a Russell-féle reductio-principium: *The principles of mathematics*, I. kötet, p. 17. (Cambridge, University Press, 1901.)

részének bent kell foglaltatnia $(ab+0)$-ban, azaz ab-ben. E közös rész tehát egyenlő ab-vel,[1] ezzel a tétel ki van mutatva.

59. Egyenlőtlenségek visszavezetése egyenlőségekre. Mint már említettük, az állítás elve alapján egyenlőtlenségeket egyenlőségekre vezethetünk vissza a következő képletek segítségével:

$$(a \neq 0)=(a=1), \quad (a \neq 1)=(a=0),$$
$$(a \neq b)=(a=b').$$

Valóban

$$(a \neq b)=(ab'+a'b \neq 0)=(ab'+a'b=1)=(a=b').$$

rvényes tehát a paradoxonszerű

$$(a \neq b)=(a=b')$$

képlet. És ez érthető, mert bármi is a b kijelentés, vagy igaz és a tagadása hamis, vagy hamis és a tagadása igaz. Másrészt bármi is az a kijelentés: vagy igaz, vagy hamis és így szükségszerűleg vagy b-vel, vagy b'-vel egyenlő. Így tehát (kijelentések között fennálló) egyenlőség tagadása ugyanannyit mond, mint az *ellenkező* egyenlőség állítása.

Innen következik, hogy a kijelentési kalkulusban nem kell egyenlőtlenségekkel foglalkoznunk, a mi az elméletet és alkalmazást egyaránt nagyban egyszerűsíti. Továbbá most már a mint az alternativ egyenlőségek, úgy a szimultán egyenlőtlenségek is összetehetők, mivelhogy egyenlőségekre vezethetők vissza.

Valóban a fentebb (57. p.) nyert

$$ab=0=(a=0)+(b=0),$$
$$(a+b=1)=(a=1)+(b=1)$$

képletekből contrapositióval nyerjük, hogy

$$(a \neq 0)(b \neq 0)=(ab \neq 0),$$
$$(a \neq 1)(b \neq 1)=(a+b \neq 1).$$

---

[1] Ez az okoskodás egészen általános, t. i.

$$\prod_x (a+x) = a,$$

ennek megfelelőleg továbbá

$$\sum_x ax = a.$$

E két képlet egyébként a megelőzők szerint egyenlőértékű a következő két ismert képlettel:

$$(a=1)(b=1)=(ab=1),$$
$$(a=0)(b=0)=(a+b=0).$$

A kijelentési kalkulusban tehát az egyenlőségek és egyenlőtlenségek minden szimultán és minden alternativ rendszere megoldható (az osztálykalkulusban ez nincs így). Csupán a következő szabályt kell alkalmaznunk:

Először is az inclusiókat egyenlőségekké, a non-inclusiókat egyenlőtlenségekké alakitjuk át, majd az egyenlőségek jobb oldalát 1-re, az egyenlőtlenségek jobb oldalát 0-ra redukáljuk és az ily alakú egyenlőtlenségeket oly egyenlőségekkel pótoljuk, melyeknek jobb oldala 1; végül elhagyjuk a jobb oldalak 1-eseit és az = jeleket, azaz megalkotjuk a szimultán egyenlőségek bal oldalainak szorzatát és az alternativ egyenlőségek bal oldalainak összegét, megőrizve a zárójeleket.

60. Befejezés. A megelőző fejtegetések távol állanak attól, hogy a tárgyat kimerítsék; nem is akartuk a logika algebrájának teljes tárgyalását adni, csupán ezen tudomány elveit és elemi elméleteit akartuk ismertetni. A logika algebrája algorithmus, melynek megvannak a saját törvényei. Egyrészt rendkívüli analógiát mutat a közönséges algebrával, másrészt ettől nagyban különbözik; nem ismeri például a *fokszám* fogalmát s a tautologia és absorptio törvénye lényeges egyszerűsitést vezet be, minthogy kizárja a számbeli együtthatókat és a kitevőket. Formális kalkulus ez, mely mindenféle elméletre és problémára adhat alkalmat és így csaknem végtelen fejlődés anyagát alkothatja.

Ámde ezen algebra mégis zárt rendszert alkot és megemlítendő, hogy egyáltalában nem öleli fel az egész logikát: úgyszólván csupán a klasszikus logika algebrája; ép úgy, mint ez, az Aristotelestől körülírt határok közt marad és csupán két vonatkozással foglalkozik, a fogalmak közti inclusiókkal és a kijelentések közt fennálló implikácziókkal. Igaz, hogy a klasszikus logika (nem is tekintve tévedéseit és szertelenségeit) sokkal kisebb körre szorítkozott, mint a logika algebrája, úgyszólván csupán a syllogismus elméletére, a melynek határai ma már rendkívül szűkeknek és mesterkélteknek látszanak. Mégis a logika algebrája — igaz, hogy sokkal bővebben és általánosabban — ugyanilyen rendű problémákkal foglalkozik és alapjában véve nem egyéb, mint az inclusio és azonosság szempontjából tekintett osztályok elmélete. Ám a logikának sok másfajta fogalommal is kell foglalkoznia, mint a genus (osztály) fogalmával és az ily fogalmak közti inclusio (subsumptio) vonatkozásán kívül sok egyéb vonatkozással is. Egyszóval a vonatkozások logikájává kell fejlődnie, melyet Leibniz előrelátott, Peirce és Schröder megalapított, Peano és Russell pedig — úgy látszik — végleges alapokra fektetett. A míg a klasszikus logikának és a logika algebrájának úgyszólván semmi haszna sincs a mathematikára, addig a vonatkozások logikájában a mathematika megtalálja fogalmait és főelveit; a mathematika igazi logikája: a vonatkozások logikája. A logika algebrája maga is mint mathematikai elmélet a tiszta logikából keletkezik, mert — hallgatagon postulált — elveken[1] nyugszik, melyek nem fejezhetők ki algebrai vagy symbolikus alakban, mert minden symbolismusnak és kalkulusnak alapját képezik. Mondhatjuk tehát, hogy a logika algebrája *mathematikai* logika, alakja és módszere folytán, de nem szabad *a mathematika* logikájának tekinteni.

(Ford. *Kőnig Dénes.*)

---

[1] A dedukczió elve és a substituczió elve. Lásd a szerző *Les principes des Mathématiques*-ját. (Alcan, Paris, 1905; II. fej. *A.*)

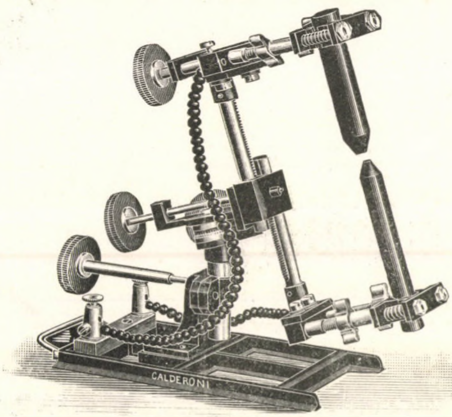
TARTALOM.

Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

Ezen készülék ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **23.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—30 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480 cm. négyzetben
Ára	**40.**—	**58.**—	**75.**—	**82.**—	**98.**—	**130.**—	**180.**—	**224.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

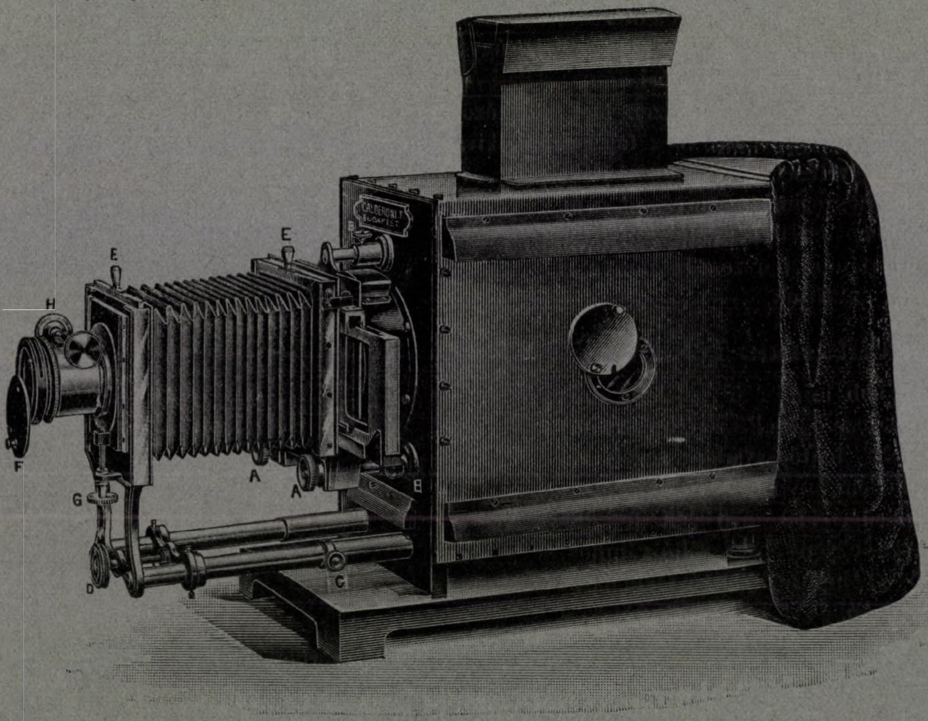
Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K 260.—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHETEDIK ÉVFOLYAM

VI—VII. FÜZET 1908 OKTÓBER—NOVEMBER.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1908.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhetedik társulati év 1908 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☛ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

A MATHEMATIKA ÖSSZEFÜGGÉSE A PHYSIKÁVAL.

PICARD EMIL előadása.

Tartotta a IV. math. congresszuson, 1908 ápr. 10-én Rómában.

A mechanika egy kiváló képviselőjétől hallottam egyszer azt az állítást, hogy a mathematikusok nincsenek helyükön a tudós társaságok természettudományi szakosztályaiban. Az volt a véleménye, hogy az erkölcsi és politikai tudományok valamely akadémiájának philosophiai vagy logikai szakosztályában kellene menedéket találniok. Tudós barátunk ez elhamarkodott kijelentésekor szemmel láthatólag csak bizonyos, a mathematikai philosophia körébe tartozó munkákra gondolt, a melyeknek ma elég megbecsülésben van részük és a melyeket ő jó akarat nélkül értékelve úgy tekintett, mint a mathematikusok logikájának a túlkapásait. Könnyű volna erre a felelet, hiszen szembeszökők az okai annak, hogy a mathematikusok az egyetemek és akadémiák ugyanazon szakosztályaiban működnek, mint a természet tanulmányával foglalkozó tudósok: a mathematika és physika közt ugyanis mindig szoros kapcsolat volt. Ezt a kérdést már sokszor tárgyalták, de talán nem lesz érdektelen újra elővenni, egy tekintést vetve a multra és ebből okulást keresve a jövőre nézve; ezt szándékozom tenni az előadásban.

I.

Kétségtelen, hogy a mathematikának eredetileg kísérleti jellege volt. A geometria kezdetben a physika egyik ága és elég burkolt tételeket fedeztek fel tapasztalat útján, mint pl. a derékszögű háromszög átfogójának tulajdonságát; ezekben az első korszakokban a természettudományt főleg a hasznossági szempont jellemezte. Általános becsülésben részesítjük a görögöket, hogy megteremtették a rationális és érdektelen természettudományt, de legalább az első görög gondolkodóknál a mathematika benső keveredésben marad a philosophiai tanokkal és a kosmogoniai álmodozásokkal. A pythagoreusok jelszava, hogy «a dolog szám» és a világra vonatkozó magyarázataik alapja a számok tulajdonságai; geometriájuk mindig mystikus és magikus jellegű volt, a mint ezt igazolja pl. a hires csillagötszög, a mely az iskola beavatottjainak ismertető jegye volt és a melyet az egészség jelképének tekintettek. Ha most a klasszikus geometriához érkezünk, a melyet Euklidesnek és követőinek a könyvei képviselnek, a tiszta logika birodalmába lépün k a hol az előbbi korokban lassan kidolgozott fogalmakon a deductio dolgozik. De ezt a képet ki kell egészitenünk, tökéletesitenünk. A geometria a görögök szemében valami nagyobb dolog volt: benne látták a tudomány ideális typusát, a melyben mindent tökéletesen meg lehet érteni. Megjegyezték már másrészt, hogy a görög geometria ezen eszményi tudománya, bár a gondolkodás utján szerkesztett tárgyakat tanulmányoz, nem veszti el az érintkezést, a térbeli intuitioval, a honnan összes fogalmait meriti, a mi lényeges pont. A mathematikát így eszközül lehet használni a világegyetem megismerésére, mivel a valóság nem más bizonyos tekintetben, mint az érzékelhető világ az arithmetika és geometria fogalmain át nézve és megértjük, miért vesznek fel korán a természettudományok — bár még nagyon korlátolt területen — mathematikai alakot. Csodálatraméltó példát szolgáltatnak erre nézve Archimedes geometriai és mechanikai munkái és az a vizsgálata, mikor a momentumok tételére támaszkodva keresi a parabola szeletének a területét, jó képét adja a közvetlen kapcsolatnak a közt, a mit ma tiszta mathematikának és alkalmazott mathematikának neveznénk. A hellenismus utolsó évszázadaiban, a mikor az előző kor geometriai kutatásai kimerültek, az astronomia szükségleteinek befolyása alatt a trigonometria és a gömbi geometria fejlődik ki Hipparchos és később Ptolemaeus kezében. Evvel a görög tudomány, hanyatlása idején példát mutat arra, a mi más időkben is előfordult, hogy a látszólag kimerült mathematikai vizsgálatok a physikai jelenségek vizsgálatából eredő problémák befolyása alatt felujultak.

Nem czélom a középkoron és a renaissanceon át követni a régiek geometriai algebrájának az átalakulásait, a mint lassankint elkülönül a geometriától. A tulajdonképeni algebra így önállósághoz jut, mindinkább tökéletesedő jelképes jelöléseiben csodálatraméltóan világos nyelvre téve szert, a melynek Fourier szavai szerint nincs jele a zavaros fogalmak kifejezésére és a gondolkodásban igazi gazdaságosságot teremt. Az egész világ megegyezik abban, hogy a jó jelzések gyakran nélkülözhetlenek ahhoz, hogy a kitűzött feladatok megoldásához jussunk. Sőt tovább mehetünk és azt mondhatjuk, hogy nem ritkán új feladatok kitűzéséhez vezetnek, mivel a gondolkodást a maga-teremtette jelképi jelölések támogatják és előbbre viszik; az algebrai egyenletek elmélete erre nem egy példát mutatott. Sőt némi veszedelem is rejlik a jelképek alkotásának e könnyüségében: az időnek kell megmutatnia hasznukat és termékenységüket. E tekintetben a használatban levő algebrai nyelvünk kiállotta a próbát, a mennyiben lehetővé tette a mathematikai tudományok haladását és az elméleti physika bizonyos részeiben az újabb jelképes jelölések elvitathatatlan szolgálatokat tesznek.

A XVII. században a kinematika és az alakulásban levő dynamika fejlődése volt oka az analysis igen nagy haladásának. Ettől az időtől számitódik a modern analysis, a mely valójában a mechanikából indult ki. A differencziál-hányados fogalmának eredete bizonyára abban a zavaros, bizonytalan érzésben van, a mely bennünk a testek mozgékonyságáról és arról a kisebb vagy nagyobb sebességről van, a melylyel a jelenségek lefolynak; a *fluentes* és *fluxions* szók erre az eredetre mutatnak. Kevés integrácziónak volt több következménye, mint a Galileiének, a mely a testek esésének problémájában a sebességek törvényéről az utakéra vezet vissza és Huygensben, Newtonban lehetetlen a mechanika és physika úttörőjét elkülöníteni a mathematikustól; ilyenek a renaissance nagy művészei, a kik egyszerre festők, építészek és szobrászok.

Döntő korszakká lett ez a mathematika történetében ép úgy, mint az a pillanat, a mikor, jóval túlmenve azon, a miről a pythagoreusok ábrándoztak, némi szabatossággal jutottak arra, hogy a természet jelenségeinek tanulmánya mathematikai alakot ölthet és főleg mikor a mechanika fejlődése arra a követelésre vezetett, hogy valamely rendszerben fellépő bármiféle természetű végtelen kis változások kizárólag csak a rendszer tényleges állapotától függjenek. Így jutottak arra a gondolatra, hogy a végső alakot differencziálegyenletekkel lehet előállítani és mi még ma is ezen elv szerint élünk, a mely a XVIII. század kezdete óta irányította az analysis fejlődését. Igazságtalanság volna elfelednünk, hogy a geometria kitűzte problémáknak is volt némi része ebben az irányításban; de hogy egyenletesebb szempontot kövessünk és ha nem félnék attól, hogy paradoxon vádjával illetnek, hozzátehetném, a mint előbb mondtam, hogy a geometria a physikának része.

II.

A mathematika története a XVIII. század folyamán leglényegesebb pontjaiban összeesik a mechanikáéval és a függvénytani kutatások újabban megmutatták, hogy korán jelentkeztek e tudományágra nézve alapvető problémák. Így Clairaut a Föld alakjára vonatkozó elméletében először vizsgál görbementi integrálokat és megállapítja azt a feltételt, a mely mellett függetlenek a két határ között befutott úttól. Hasonlóképen, a complex változós függvények elméletének két alapvető egyenlete legelőször d'Alembertnek egy a folyadékok ellenállásáról szóló értekezésében jelenik meg, a ki látja, hogy milyen szerepe van ebben az elméletben a $\sqrt{-1}$ jelnek, a melyet már

Leibnitz és Bernoulli János bevezettek; valamivel később d'Alembert irta le először a $\Delta\varphi = O$ egyenletet. Tudjuk, hogy az előbbi kutatásokhoz nagyon hasonló vizsgálódás vezette rá a rezgő húrok egyenletének integrálására is. Újra megtaláljuk még a complex változós függvényeket Eulernek egy későbbi értekezésében a folyadékok mozgásáról és Lagrangenak a térképekre vonatkozó munkálataiban. Tehát a modern analysis egyik ága, a mely a XIX. században a legnagyobb fényét érte el, a mechanika és physika problémáiból eredt.

Nem kevésbé volt fontos az analysis fejlődésére nézve az attractio tanulmányozása. Kivánhattunk volna az égi mechanika fáradságos számitásainak egyszerűsége érdekében más törvényt, mint a távolságok négyzetének az elve; de ha a természet kárpótlással tartozott, be kell vallanunk, hogy bőkezűen megadta avval, hogy megengedte a Newton-féle potentiálelmélet megalkotását, mert e szempontból semmiféle más vonzási törvény nem volna alkalmas annyi termékeny és általános érdekű probléma kitűzésére. Különösen ki kell emelnünk ebben a gondolatkörben azt az egyenletet, a melynek a potentiál a vonzó tömegeken kivül tesz eleget; mivel ez előfordul a hydrodynamikában és a hőelméletben is, különböző typusú határproblémákra vezetett, a melyek általánosabb egyenletekre kiterjesztve még ma is sok reményre jogositják az analysissel foglalkozókat. Lagrange sajnálta, hogy csak egy világrendszert kell kikutatnia. Mi részünkről majdnem hajlandók volnánk azt hinni, hogy soha se fogunk megint oly termékeny bányára akadni, mint a Newton-féle potentiál vizsgálatához kapcsolódó physikai elméletek ezen összessége, ha nem tudnók, hogy a természettudományokban képzeteink és fogalmaink a megfigyelés és tapasztalat haladása folyamán fejlődnek ki és ennek következtében nem jogosultak az olyan panaszok, mint a Lagrangeé. Mindig lesz a világrendszernek néhány zuga, a melyet ki kell kutatni és kétségtelenül, legalább mi mint mathematikusok reméljük, lesz az analysisnek néhány problémája, a melyet meg kell oldanunk.

A hő analytikus elmélete Fourier halhatatlan művében szintén sok problémának nyitott utat és találunk benne integrálási módokat, a melyekre maguk a physikai kérdések vezettek rá. Néha ugyanis ezek a kérdések nemcsak az analytikai anyagot adják, a melyen a mathematikus dolgozni fog, hanem útmutatásokat is adnak, hogy milyen utat kövessen a megoldásban. Így a molekularis elméletekben a parcziális differencziálegyenletek úgy jelentkeznek, mint véges külömbségi-egyenletek, vagy közönséges differencziálegyenletek határalakjai, a melyek könynyebben kezelhetők; de épenséggel az is előfordulhat, hogy a megoldások alakjának előállítása végett czélszerű ez utóbbi egyenletekre visszatérni. Ez az eset áll be Fouriernél, mikor a különálló tömegek közt létrejövő hőközlést tanulmányozza és alkalmazza arra az esetre, mikor a tömegek száma végtelen. Gyakran folyamodtak ilyenféle meggondolásokhoz existentia tételek kimutatása czéljából, úgyhogy azután a határra tértek át és megemlithetnénk egészen új, a függvényegyenletekre vonatkozó munkákat, a melyek alapjában véve ugyanazt a gondolatot használják fel, a melynek alkalmazása másrészt nagy nehézségekkel járhat. Oly esetek ezek, a mikor a physika az analysisnek kettős szolgálatot teljesit, a mennyiben problémákat tűz ki elé és ezek megoldásához szempontokat jelöl ki.

Gyakran idézték Fourier előszavának azt a szép részletét, a mikor azt a gondolatot fejtegeti, hogy a természet mélyreható tanulmányozása, a mathematikai felfedezések legtermékenyebb forrásai; de el kell ismernünk, hogy ott inkább beszél physikus, mint mathematikus minőségben, a mikor annak a szükségességét hangsúlyozza, hogy el kell menni egészen az utolsó numerikus alkalmazásokig, a mi szerinte szükséges feltétele minden vizsgálatnak, mert nélküle csak haszontalan átalakitásokra jutunk. Fourier itt nagyon megszoritja a mathematikai analysis szerepét és ha a physika volt a nagy analytikai elméletek eredeti forrása, a mathematikus más szolgálatokat teljesit a physikusnak, mint hogy numerikus előrelátások lehetőségét adja. Mindnyájan találkoztunk a kisérleti tudományokkal foglalkozó oly tudósokkal, a kiknek a szemében a mathematikának ez az egyedüli haszna. Ez azonban félreismerése annak a csodálatra méltó hatalomnak, a mely a gondolkodás átalakításában és a mathematikai számításban rejlik. Lehetséges-e pl. hogy az ember csodálattal ne teljék el, a mikor Greennek sokáig észrevétlenül maradt értekezését olvassa, az analysis alkalmazásáról az elektromosság és mágnesség elméleteire, a melynek eredményeit Gaussnak, Chaslesnak és Thomsonnak 10 év mulva újra fel kellett fedeznie. A számítás itt megelőzte a kisérletezést, a mennyiben felfedezte az elektrostatikus inductio alapvető törvényeit, a melyekre Faraday emlékezetes kisérleteinek később kellett vezetniök.

Kissé jobban rátérve a parcziális differencziálegyenletek elméletének részleteire, más példákat találunk, a melyek jól jellemzik azokat a szolgálatokat, a melyeket a mathematika tehet a physikának.

Így a tovaterjedés szempontjából nagyon külömböző fajtájú hullámok nagyon világos áttekintése a különböző egyenlettypusok vizsgálatának eredménye. A hőelméleti typusú egyenletekben az integrálok vizsgálata azt mutatja, hogy minden változást bármily távolságban rögtön meg lehet érezni, de igen nagy távolságra csak nagyon kis mértékben, úgy hogy ilyenkor terjedési sebességről nem lehet beszélni; valamely pontban a hőmérséklet maximumon megy át, hogy azután fogyjon és az az idő a melynek elteltével a hőmérséklet ezt a legnagyobb értékét eléri, a távolság négyzetével arányos. Kelvin lord alkalmazta Fourier egyenletét az elektromos hullámoknak kábelekben való terjedésére, az önínductió hatásának elhanyagolásával; így kimutatta, hogy a jelzések minden zavarra nézve a távolság négyzetével arányos időben érik el legnagyobb értéküket és az elmélet ezen eredményének lényeges szerepe volt a tengeren át való táviratozás berendezésében.

Másként állnak a dolgok azoknak az egyenleteknek esetén, a melyeknek typusát a hang terjedési egyenlete adja; külömben ugyanez az egyenlete a fény és az elektromos hullámok terjedésének is. Itt a hatást nem lehet azonnal megérezni; bizonyos ideig tart és azután megszűnik, legalább így van ez az egy- és háromméretű közegekben. A két megelőző typus mintegy össze van sűrítve abban az egyenletben, a mely a hangnak viscosus folyadékban, az elektromos hullámoknak kis mértékben vezető dielektrikumban, vagy el nem hanyagolható önin-ductioval bíró telegraphikus vonalban való terjedésére vonatkozik. Ebben az esetben szintén meghatározott sebességű hullámokban való terjedésről van szó, de ez a hullám hátrafelé megnyúlik és határozatlan ideig maradó nyomot hagy; a telegráphikus közléseknél ez a jelzések összezavarodásának lehet az okozója és így adtak az emberek számot azokról az ellenmondó eredményekről a melyeket Fizeau az elektromosság sebességére vonatkozó vizsgálataiban kapott.

A hullámok terjedésének ezek a physikára nézve oly érdekes kérdései talán nem kevésbé érdekesek a psychologia szempontjából. A passiv ellenállások hiányának köszönhetjük, hogy általában a látási és hallási érzékletek sokáig megtarthatják világosságukat; ezért mondták, hogy ezek az igazi értelmi érzékek. E tekintetben a látás alacsonyabb rendű a hallás érzékénél, a fény szétszóródása következtében, a mi a mérsékelt hangoknál nem fordul elő. Hozzá kell ehhez tennünk másrészt azt a lényeges szerepet, a mely az akusztikában a harmonikus hangokat illeti; ez a szerep sokkal kisebb az optikában, a hol a szem észrevevő képessége nem terjed ki egy octávra; és ez nem távolít el bennünket a mathematikától, ha igaz egyes physiologusoknak az az állítása, hogy a fül labyrinthusában levő Corti-féle szervet kell a számtani érzék szervének tekintenünk, mert ez adja számunkra a szám fogalmát.

Meg kell azonban vallanunk, hogy a mathematikának vannak ellenségei és nem ritkán vonják kétségbe, illetve tagadják, hogy az analysis lényeges szolgálatot tett a physikának. Azt a kifogást teszik, hogy sok analytikai eredmény csak egyszerű szemléletek fordítása, a melyeket physikai analogiák alakjában is ki lehet fejezni a nélkül, hogy a mathematika jelképeihez, vagy differencziálegyenletekhez kellene folyamodnunk; ilyenkor a kiváló Faraday példáját szokták idézni. Mindenekelőtt azt lehet erre felelni, hogy az integrálok kiszámítását sokféleképp el lehet végezni és meg lehet ezt tenni úgy is, hogy megszámláljuk az erővonalakat. Nem mindig lehet ezen az úton jó messze menni a nélkül, hogy az analysis nyelvéhez folyamodnánk, a mely szabatosságot kölcsönöz a fogalmaknak, mert külömben az a veszedelem fenyeget, hogy e fogalmak bizonytalanok maradnak és nagyon kevéssé lesznek alkalmasak quantitativ eredmények szolgáltatására; ha Faraday mathematikus lett volna, megelőzhette volna Maxwellt az elektromos hullámok terjedési törvényeinek a kutatásában. Fresnel korábbi példája is ugyanilyen természetű; lángeszű intuitioval felismerte az æther transversalis rezgéseit, de lehetne-e igazán pontos fogalmat alkotnunk a transversalis és longitudinalis rezgések általános megkülömböztetéséről, mielőtt felirnók valamely rugalmas közeg mozgásának parcziális differencziálegyenleteit? én a magam részéről kétségbe vonom. Nem akarom azt mondani, hogy ne lehetne bizonyos birálattal illetni a mi mathematikai természetszemléletünket, de ez a birálat más természetű; mindjárt lesz alkalmam arról is mondani egykét szót.

III.

Megmutattuk egyes példákon a mathematika és physika kölcsönös kapcsolatait. Általában azt látjuk, hogy a mechanika és physika külömböző részeinek fejlődésében az inductio egy-egy korszakára deductiv korszak következik, a mikor minden törekvés arra irányul, hogy az alapelveknek végleges alakot adjanak. A mathematikai, formális kifejtésnek ekkor nagyon fontos szerep jut és az analysis nyelve nélkülözhetetlenül szükséges az alapelvek legnagyobb kiterjesztése végett. A jelképes jelölésmód támogatja és előbbre viszi a gondolkodást és így az általánositások igen kis fáradsággal történnek meg. Az analysis jelöléseinek egyszerű játékával az eredeti kereteken jóval túl-menő általánositások gondolatát tudja kelteni, ha ez néha csak a symmetria kedvéért történik is. Nem így történt-e a dolog a virtuális elmozdulások elvével, a melynek első gondolata a legegyszerűbb gépektől származik? a megfelelő kettős szorzatok összegeit tartalmazó analytikai alak oly általánosítások eszméjét adta, a melyek a rationalis mechanikából az egész physikán át a chemiai mechanikába vezettek. Még más példát szolgáltattak Lagrange egyenletei; itt számításbeli átalakitások vezettek a differencziálegyenletek azon typusára, a melyekre a mechanikai magyarázat fogalmát visszavezetik. A mathematikus művészet teremtett oly példát, a mely valamely analytikus összefüggés alakjának fontosságát bizonyítja; magától értetődik, hogy azután a tapasztalat van hivatva annak az eldöntésére, vajjon az így alkotott alak eléggé megegyezik-e a kisérlettel.

Ily példák eléggé megmutatják, mi a jelentősége egy elég gyakran hallható mondásnak, t. i. hogy valamely képletben csak az van, a mit beletettünk; ennek vagy nincs értelme, vagy tiszta közhely. Alapjában véve azonos fogalmaknak nagyon külömböző alakjuk lehet és bekövetkezhetik az az eset, hogy az alak lényeges; így az energia is állandó mennyiségű lehet, de minősége változhat. Az előzőkben idézett példákhoz csatolhatnók az égi mechanikát, a melyben semmivel sincs több, mint az általános nehézkedés képlete és néhány megfigyelésből nyert állandó, de a melyben számtalan számításbeli átalakitás elvezet bennünket ettől az indulóponttól a csillagmozgások majdnem minden részletének magyarázatához.

Még egy példát idézünk az analytikai átalakítások gondolatébresztő hatására, ha a legkisebb hatás elvéhez kapcsolódó gondolatkörre hivatkozunk. Nagyon korán megvolt már az emberekben valami határozatlan sejtelem a természeti jelenségekben uralkodó gazdaságosságról: az első példák egyikét Fermat elve szolgáltatta, a mely a fényátbocsátás idejének az œkonomiájára vonatkozik és rájöttek annak a felismerésére, hogy a klasszikus mechanika egyenletei minimum problémának felelnek meg. A kiterjesztések ekkor maguktól kínálkoztak, mint a variatió módszere analytikai átalakításainak szükséges következményei, sőt ebből még a határfeltételekre is hasznos útmutatások következtek. Mindig ugyanavval a menettel találkozunk: a bizonytalan érzésnek a mathematika jelképes rendszere határozott, világos alakot ad, a mely általánosítások gondolatát kelti fel.

Tudjuk, mily fontossága van ma a mechanika fejlődésében a legkisebb hatás elvének. Ez a teleologiai sajátságú régi elv látszik utolsó menedékünknek abban a talán túlzott válságban, a mely jelenleg átvonul a mechanikán és a kérdések e körében nagy kiterjesztéssel újra felvették utóbbi időben azt az eszmét, a melyet régen Laplace pendített meg a pont olyan mechanikájáról, a melyben a hatás a sebesség valamilyen függvénye, a mi a sebességgel változó tömegre vezet.

IV.

De térjünk most kissé vissza. A XVII. és XVIII. században majdnem mindig azt látjuk, hogy ugyanazok a tudósok művelik a mathemetikát, a kik ezt a physikára is alkalmazzák. El kellett azonban érkeznie annak a pillanatnak, a mikor beállt a különválás; ez az általános törvény sajnos mindenféle kutatásban érvényesül és ez alól csak az a néhány ritkán előforduló szellem tud megszabadulni, a mely elég hatalmas ahhoz, hogy a terjedelmet ne kelljen feláldoznia a mélységnek. Lehetett egy időben az infinitesimális számítás csodás diadalai után remélni, hogy a mathematikusok ily hathatós szerszám birtokában képesek lesznek elmélkedéseiket kizárólag a természeti törvények tanulmányára fordítani. Ennek a reménynek gyorsan el kellett mulnia; a kitűzött problémák ugyanis egyrészről újabb tökéletesítéseket kívántak, másrészt szükségessé tették az elfogadott, de gyakran nyugtalanító ellenmondásokra vezető alapelvek kritikai tanulmányozását. Új korszaka nyilt meg a mathematikának, mely minden tekintetben emlékeztet arra az időre, mikor az önállóvá lett görög geometria különvált a kosmogonikus és philosophiai elméletektől, a melyekkel a megelőző korszakban szorosan egybefűződött. Ez átalakitás munkásai közül Gauss és Cauchy egyúttal nagy physikai elmélkedők is voltak, de Abel tisztára mathematikus. A XIX. században voltak kiváló mathematikusok, a kiknek a munkássága egyetlen ponton sem érintkezik az elméleti physikával. Ilyenek az algebrára és a számelméletre vonatkozó munkák, ilyenek egyszersmind a mathematika alapelveire vonatkozó kutatások is.

Mindig kell némi óvatosságot tanúsitanunk ilyen állításokkal szemben. Rejtett kapcsolatok elkésve válhatnak nyilvánvalóvá; logikánk oly fogalmakra épiti az elméleteket, a melyek végeredményben az érzékleteinken végzett munka eredményei és lehetetlen *a priori* kijelentenünk, hogy ilyen elméletet nem lehet majd valamikor a természettudományokban értékesíteni. Bár vannak bizonyos kérdések, a melyek ma valaki szemében puszta logikai gyakorlatoknak tetszhetnek, mindenki elismeri, hogy az általános függvénytan haladásának igen nagy fontossága volt az elméleti physika szempontjából. Micsoda látszólagos ellenmondások szüntek, mikor a parcziális differencziálegyenletek integráljainak általánossági fokát mélyitették! A mathematikában gyakran előfordul, hogy nagyon különös esetek vizsgálata meggátolja a dolgok igazi okának észrevételét és e tekintetben a függvény fogalmának napjainkban eszközölt nagy kiterjesztése termékeny lesz oly alkalmazásokban is, a hol első tekintetre hasznavehetetlennek tetszik.

A modern analysis egyik legszebb fejezetének tárgyai az analytikus függvények, első pillantásra nagyon kevés érdekességgel biztatnak abból a szempontból, a melyre most helyezkedtünk; a megközelités nagyon sajátlagos módjának tetszenek és más kifejtések, mint pl. a trigonometrikus sorok, a physika és mechanika kérdéseire inkább alkalmazhatóknak mutatkoztak; külömben ezeknek az eredete is itt volt a physikában. Azonban mélyrehatóbb tanulmányok azt mutatták, hogy az analytikus függvényeknek az elméleti physikában igen nagy a fontosságuk. Nagyszámú parcziális differencziálegyenletről kitűnt, hogy valamennyi integráljuk a tér bizonyos részeiben analytikus. Úgy látszik, hogy ilyen egyenleteknek megfelelő jelenségekben az önkény kisebb mértékben lehetséges, s bár ez a gondolat szükségképp határozatlan, de az a határozott tény felel meg neki, hogy valamely megoldásra vonatkozó határfeltételek mások, mint oly egyenletnél, a melynek nem analytikus minden integrálja. Elegendő összehasonlítanunk a rezgő húrok egyenletét valamely lemez hőegyensúlyának oly közelálló egyenletével.

Ugyanigy valamely megoldás egyedülvalóságának kimutatása külömböző nehézségekkel járhat a szerint, a mint oly egyenlettel van dolgunk, a melynek valamennyi integrálja analytikus vagy nem analytikus. Még ha az általános esetre szorítkozunk is, a mikor a probléma adatai nem felelnek meg charakteristikumoknak nem analytikus integrálok közt, lehetnek végtelen rendű összefüggések, míg ez a körülmény analytikus megoldások esetén nem fordul elő; érdekes példa erre Lagrange híres tétele a hydrodynamikában a sebesség potencziáljáról, a mely nem érvényes viscosus folyadékokra, bár adott pillanatban a forgások és az időre vonatkozó minden rendű differencziálhányadosaik zérussá lehetnek. Itt a kérdések oly sora van, a melyeket csak különleges esetekben oldottak meg, különösen, mikor nem lineáris egyenletekről van szó.

Az integrálok létezési tartományának és analytikai folytatásának kérdése az elméleti physikára nézve nem kisebb érdekű, mint az analysis szempontjából. Semmiféle új kérdés nem merűl fel, ha az összes integrálok analytikusok; egészen másként áll a dolog az ellenkező esetben. A folytatás akkor abban a körülményben rejlik, hogy bizonyos rendig összefüggések vannak; e fogalmak vezettek a folyadékok mechanikájának legfontosabb eredményeire.

Új szempontok még szorosabbra fűzték a complex változós függvények elméletének és az elméleti physika kérdéseinek összefüggését. Több ilyen kérdésbe egy parameter lép be és nagyon hasznos volt a bizonyos feltételeknek megfelelő megoldást e parameter függvényének tekinteni. Ámde számos esetben a megoldás ilyen szempontból nézve ennek a parameternek egyértékű analytikus függvénye. Így a hártyák rezgése esetén az egymásután következő harmonikus felhangok az egész síkon meromorph függvény polusainak felelnek meg. Kimutatták azt is, hogy a rugalmasság elméletében, ha megadjuk az eltolódásokat, vagy a felületre ható erőket, a megoldások a rugalmassági parameter olyan egyértékű függvényei alakjában jelennek meg, a mely függvényeknek polusokon kívül lényeges singularításuk is van véges távolságban. Ezek a nem régi eredmények mutatták meg azoknak a nehézségeknek igazi forrását, a melyek sokáig meggátolták az analysis terén kutatók törekvéseinek eredményességét.

Az is előfordul, hogy a megoldás a határ értelmezésében szereplő egy vagy több geometriai parametertől függ; e parametereknek bizonyos különleges értékei különösen érdekes eseteknek felelnek meg, mint pl. oly testek esetén, a melyeknek egy mérete eltűnő. Külömben a singularitások egy vonalon mindig sűrűk lesznek és a physikának még az elnevezései is bejutnak az analysisbe, a mikor egyes értekezésekben azt olvassuk, hogy a singularitások folytonos szinképet adnak. A mikor manapság azt halljuk, hogy vonalas és sávos szinképekről beszélnek, nem kell hinnünk, hogy okvetlenül physikáról van szó. Épúgy lehet szó tiszta analysis körébe vágó kérdésről, ha ugyan nincs szó egyikről is meg a másikról, mint pl. a mikor bizonyos függvényegyenletek tulajdonságai útján igyekeztek megmagyarázni a szinkép vonalainak sűrűsödését.

Mindezekben az esetekben, a melyekre most czéloztam, a differencziálegyenletek vagy függvényegyenletek lineárisak voltak; némely érdekes esetben előfordultak nem lineáris egyenletek, de olyankor nagyon nehéz próbálkozás a megoldásokat az egyenletben szereplő parameter függvényeiként jellemezni, mert ezek a függvények sokértékűek lehetnek és singularitásaik kezdő feltételektől függhetnek. Ez fontos és nehéz kutatások tárgya.

Fontos szerepük van a modern analysisben az összefüggések kérdésének. Ha nem akarunk egész Nagy Sándorig visszamenni, a ki kissé brutális módon végezte a bevágásait, ezek a kérdések először akkor jelentkeztek, a mikor a csomókat és áramoknak áramokra vagy mágneses polusokra való hatását geometriai úton tanulmányozták; itt jelentkezett először az integrálok periodikusságának fogalma is. Ugyanazon időben az elektromosság és mágnesség elméletébe bevezették a nem egyértékű potentiál fogalmát; kevéssel később az algebrai függvények elmélete és a Riemann-féle felületek vizsgálata élénken fellendült, mivel a két terület közt a legközvetlenebb összefüggés áll fenn épen akkor, a mikor az Abel-féle integrálokra vonatkozó számos kérdés lefordítható lett az elektromosság nyelvére.

Nem a Laplace-féle egyenlet az egyetlen differencziálegyenlet, a melynek a megoldásait Riemann féle felületen vagy többszörösen összefüggő terekben vizsgálták. Hasonló vizsgálatot lehet végezni a sugárzó meleg egyensúlyának egyenletén és a hártyák egyenletének nem egyértékű megoldásai egy ernyőnek a fény- vagy elektromágneses hullámokban okozott zavarainál, azaz az elhajlási jelenségeknél is előfordultak. Szemrehányásokkal illethetném magamat, ha meg nem emliteném, hogy a rugalmassági egyenletek vizsgálata utóbbi időben a többszörösen összefüggő testek egyensúlyának tanulmányozása révén felújult, mert akkor az eltolódások nem egyértékű függvények, míg az alakváltozás jellemző elemei egyértékűek maradnak. Azt mondhatjuk, hogy az elméleti physika egyenleteinek polydrom megoldásaitól még sok meglepetést várhatunk és ezek a felfedezéseknek termékeny bányái lesznek.

Van az analysis problémáinak még egy eddigelé kis mértékben tanulmányozott csoportja, a melyekre azonban az elméleti physika több kérdésének rá kell vezetnie: Oly függvények vizsgálatát értem, a melyek a tér két tartományában külömböző typusú egyenleteknek felelnek meg és a melyeknek épúgy, mint bizonyos differencziálhányadosaiknak az ezen tartományokat elválasztó felület mentén meg kell egyezniök; ez az eset fordul elő például két fal között végbemenő hőkiegyenlitődési áramok vizsgálatánál.

Unalmas volna ezt a felsorolást folytatnunk, a melynek során azt látjuk, hogy a physika új problémákat tűz ki az analysis elé. Azonban nem hagyhatjuk megemlités nélkül, hogy az elektromosság elméletének köszönhetjük a vonalas függvények vizsgálatát, a melyek fényes analytikai kifejtésekre adtak alkalmat és magát a függvényfogalmat is bőven kiterjesztik.

V.

A physika és mathematika összefüggésének történeti áttekintése közben láttuk, milyen szolgálatot tett e két tudomány egymásnak. A physikai jelenségek tanulmányozásának a befolyása alatt alakultak ki a mathematika főbb tudományágai; nagyon gyakran ezek a tanulmányok vetették fel, legalább közvetve, a problémákat, sőt útmutatásokat is adtak azok megoldására. Viszont, anélkül, hogy azokról az új tényekről beszélnénk, a melyeket az analysis átalakításaiban rejlő hatalom a tapasztalat megelőzésével hozott napfényre és a nélkül, hogy súlyt fektetnénk azokra a numerikus előrelátásokra, a melyekre képesit, elég lesz csak arra emlékeznünk, hogy nyelvének a pontosságával szabatos és maradandó alakot adott oly fogalmaknak, a melyeknek külömben határozatlanoknak kellett volna maradniok és hogy jelzéseinek milyen általánosító erejük van. Bár bennünk már nincs meg az a lángoló hit, a mely Fouriernek és a mult század első felében élő mathematikus physikusok csodálatraméltó iskolájának keblében élt, a mathematikai analysis mindig nélkülözhetetlen eszköze és nem ritkán értékes vezetője marad a physikának.

A mikor a mathematika és physika közt fennálló összefüggésekről beszéltünk, csak oly tényt állapitottunk meg, a mely a természettudomány fejlődéséből magából következik. Ha most magasabb szempontból akarjuk nézni a dolgokat, azt kell kérdeznünk, mi az oka ennek az előttünk szükségesnek látszó kapcsolatnak; azt is kutatnunk kell, nincsenek-e gyenge pontjai és nem ölthet e más alakokat.

A physika tudománya úgy tűnik fel előttünk, mint a külső világnak a tapasztalatból elvont fogalmakon át való szemlélete. Egyes tényekhez és bizonyos feltevésekhez csatolt fogalomrendszert megfelelő deductiók útján át lehet alakítani. Ha ezek a fogalmak mathematikai természetüek, akkor a külső világról mathematikai képet nyerünk, a melyen logikánk dolgozhatik. A mint Helmholtz mondotta, a törvény logikai alakja útján gyakoroljuk szellemi uralmunkat a természeten, a mely kezdetben idegen volt ránk nézve. De mindez nem megy áldozatok és veszedelmek nélkül. Az a valóság, a melyet a mathematikus physikus vesz szemügyre, nagyon halvány ahhoz képest, a mely a közönséges szemléletet foglalkoztatja. Hogy evvel a zavaros valósággal tudományos munkát lehessen végezni, egyszerűsíteni kellett és a dolgok ingatag körvonalait szigorúbb korlátok közé kellett foglalni. Csak ekkor, ezen a megszorított természeten tudunk elmélkedni. Ha ebben erő van, itt van egyik oka a veszedelmeknek is. Ezeket mindig kisebbíti az a szabadság, a mely bizonyos mértékben fogalmaink alkotásánál és az elméleteinkben előforduló feltevések megválasztásánál nyilvánul. Itt a mathematikusokat rendkívül érdeklő pontot érintünk, mert ép arról az anyagról van szó, a melylyel dolgoznunk kell.

Ha az anyagi pont fogalmával elfogadjuk a klasszikus mechanika alapját tevő gondolatokat, mindjárt oda jutunk, hogy valamely jelenséget úgy tekintsünk, mint a mely igen nagyszámú differencziálegyenletnek felel meg, a melyekben valamennyi pont gyorsulása coordinatáik összességének a függvénye. De az ilyen előállítás csak nagyon sajátlagos esetekben termékeny. Mindig a pontok valamely csoportjára nézve bizonyos közepes tulajdonságokat kell feltüntetni, hőmérsékletet, nyomást, stb., a melyeket egy általános pont coordinatái és az idő függvényeinek tekintünk. Avval a feltevéssel aztán, hogy minden pontot főképp a szomszédos pontok befolyásolnak, parczialis differencziálegyenleteket alakitunk, a melyekben a klasszikus mechanika alapfeltevése értelmében bizonyos időszerinti parcziális differencziálhányadosokat ki lehet fejezni e függvények és a coordináták szerinti differencziálhányadosaik segítségével.

Ez a rendes physikai egyenletek szokásos alakja, a mely néha még a passiv ellenállásokra vonatkozó, az említettekhez hasonló szerkezetű tagokkal bővül. Ez képviseli azt az analytikai alakot, a melybe sűrítve látjuk mi mathematikai szemmel nézve a dolgokat. A jelenségek ilyen előállitása rendkívül termékenynek bizonyult, a mint ezt számos példa mutatta ezen előadás folyamában is. De nagyon sok egyszerűsitő feltevéssel éltek e kép megalkotói és előreláthatólag nem lehet majd mindig ezekhez ragaszkodnunk. Ennek a következményei nagyon fontosak lesznek ránk nézve és az analysisben minden bizonynyal új tanulmányágak fognak ennek hatása alatt keletkezni. Elérkezik talán majd az az idő, a mikor az anyagnak a mathematikai tárgyalhatóság czéljából való — ha szabad mondanom — higitása a helyett, hogy folytonos sokaságban történnék, valami más mindenütt sűrű sokaságban fog végbemenni; de ez a kilátás kétségtelenül elég távoleső és valószinüleg egyáltalán nem elégitené ki a mechanikának azt a tudós művelőjét, a kiről az előadás kezdetén beszéltem. Más lehetőségekhez sokkal közelebb vagyunk. Néha bizonyos kérdésekben nem lehet elhanyagolni a valamely rendszertől távol eső részeknek ezen rendszer egy részére gyakorolt hatását és ha a problémát egész általánosságában tekintjük, már nem állíthatjuk elő differencziálegyenletek alakjában, hanem oly függvényegyenleteket kapunk, a melyekben ismeretlen függvények differencziálhányadosai is szerepelnek és az előforduló integrálok a vizsgált rendszertől elfoglalt térfogatra vonatkoznak. Tudjuk, minő eredménnyel vizsgálták az utóbbi időkben a függvényegyenletek egyik sajátlagos typusát és hogy sikerült rendkívül egyszerű alapelvekre vissza vezetni a kérdések oly csoportját, a mely a legnehezebb vizsgálatok tárgya volt; emlékezetreméltó példája ez annyi más mellett annak, hogy valamely különleges kérdés megoldását az általánosabb szempont menynyire megkönnyitheti. Sőt bizonyos határfeltételek esetén nagyon érdekes a differencziálegyenletek helyébe függvényegyenleteket irni és köteteket lehetne megtölteni azokkal az idevágó munkákkal, a melyek az utóbbi hét-nyolcz év alatt jelentek meg. Tehát a közel jövőben a kutatók tövekvéseit a mind bonyolultabb függvény-egyenletek vizsgálatának kell foglalkoztatnia. Sokoldalubb kutatási terület nyilik meg itt előttünk, mint a differencziálegyenletek elmélete, a mely annak csak egyik különleges része. Nem a véletlen vezeti e téren való haladásunkat, mert a mechanika vagy a physika mutatja meg, hogyan válasszuk kutatásaink anyagát.

A távolabbi jövendő számára még bonyolultabb feladatokat jósolhatunk. Említettük, hogy a mechanika sokáig postulált többé-kevésbé kifejezetten valami nem-öröklődési elvet. Még most is ehhez az elvhez alkalmazkodunk, legalább első megközelitésben, a nem élő természetre vonatkozó tudományokban, bár számos jelenségeit mutatja, hogy a jelen állapotban megvan az elmult állapotok nyoma: így az olyan testek mint a kén, a melyek előző történetük szerint külömböző sebességgel térnek át egyik alakból a másikba. De az öröklődésnek különösen az életre vonatkozó tudományokban van lényeges szerepe és nem tudjuk, vajjon felhasználhatjuk-e valamikor a mathematika nyujtotta eszközt a biologiai jelenségek belső lefolyásának a tanulmányozására, vagy nem kell-e mindig durva középértékekkel és gyakorisági görbékkel beérnünk. Azonban nem kell előre megszoritanunk a világra vonatkozó mathematikai képünket és álmadozhatunk az előzőknél bonyolúltabb függvényegyenletekről, a melyekben szerepelni fognak azonfelül még valami régmult időtől a jelenig terjedő integrálok, mert ezek képviselik majd az öröklődést. Ezek a függvényegyenletek végtelenül bonyolult feltételek mellett az utóbbi években annyi eredménnyel vizsgált két egyszerű typus jellemző vonásai, a melyek egyikében az integrálok határai állandók, másikában változók.

Ezek talán csalóka remények. Az is meglehet az élet mozgó porondján, a hol rendkívül nagyszámú változó szerepel, hogy lehetetlen lesz bizonyos középállapotokra vonatkozó függvényegyenleteket alakítani, a melyeknek az volna a szerepük, mint jelenleg a differencziálegyenleteké az elméleti physikában. De ha a philosophus tartózkodó álláspontra is helyezkedhetik, a mathematikust nem fenyegeti semmi veszedelem, ha teljesen ezeknek a vakmerő szempontoknak engedi át magát, a melyek munkásságát feltétlenül termékeny irányba terelik.

És ismét a külső világ fog bennünket analytikai kutatásainkban vezetni, megmutatva azon utakat, a melyek befutása haszonnal járhat. Láttuk, hogy mindig így volt ez és nem habozunk kijelenteni, hogy ugyanígy lesz a jövőben is. Hogy visszatérjünk az ezen előadás elején mondottakra, azok mellett van a mi igazi helyünk, a kik a természettudományokkal foglalkoznak. Joggal-e vagy sem, azt hiszszük, hogy egyszerű mintákat adunk nekik, a melyek alakjában a külső világot logikusan szemlélhetik. Viszont ők nagy értékű szolgálatokat teljesítenek velünk szemben, a mennyiben ők vezetnek az alakoknak abban a végtelen változatosságában, a melyet szellemünk felfog. Ebből a szempontból nézve, a mathematika nem olyan különös és rejtelmes tudomány, a milyennek annyi ember képzeli; lényeges része a természetbölcselet épületének.

Fordította: *Kelemen Ignácz.*

AZ ELEKTRODINAMIKA ALAPEGYENLETEINEK MEGOLDÁSI MÓDSZEREIRŐL.

(Első közlemény.)

A jelen sorokban az áramkörrendszerekre vonatkozó tapasztalati tételek fizikai tartalmának meghatározását akarjuk bemutatni.

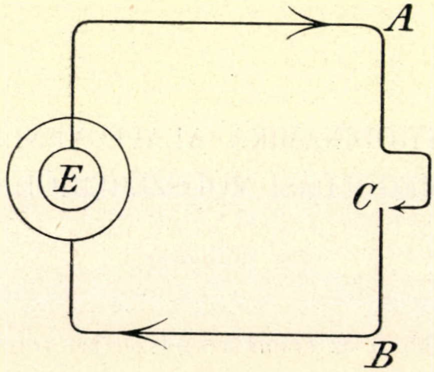
Mielőtt a tapasztalástól távolabb eső, de azért a tapasztalat alapján létrejött általánosabb tételek tartalmának a megvizsgálásához hozzáfognánk: előbb néhány oly — a tapasztalással is jobban megközelíthető — indukcziós tétel megvizsgálását mutatom be, melyek nemcsak hogy alapul szolgálnak a tapasztalatnak a tapasztalás határain túl való kiterjesztésére, hanem egyszerűségüknél fogva jobban szemlélhetővé teszik azokat a módszereket, melyekkel tartalmukat meg akarjuk világitani, s a melyeket a föntebb emlitett általánosabb feladatok megoldására alkalmassá tenni egyik fő feladatunk.

I. Az elszigetelten álló áramkör.

Elszigetelten álló az áramkör, ha minden más a térben fellépő elektrodinamikai jelenség oly távol van tőle, hogy azok hatásukat vele nem éreztetik.

a) Áramkör kondenzátor nélkül s konstans elektromotoros erővel.

Válaszszuk áramkörünkben a pozitiv irányt az 1. ábrában megjelölt módon. Ha már most áramkörünkben levő konstans elektromotoros erő E, az áram intenzitása J, A és B pontokban a potencziális rendre: V_a és V_b, az $\overrightarrow{ACB}$ és $\overrightarrow{BEA}$ veze-



1. ábra.

tőknek az ellenállása rendre W_1 és W_2, akkor az áramkörünkre vonatkozó Ohm-féle tapasztalati törvényt a következő egyenletek szemléltetik:

$$\left.\begin{aligned} E+V_b-V_a &= W_2J, \\ V_a-V_b &= W_1J. \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Mely egyenletekből, ha

$$W_1+W_2=W,$$

összeadással a következőt nyerjük:

$$E=WJ. \quad \text{(II)}$$

Ha $t=0$ időben áramkörünkbe C pontban W' ellenállást iktatunk be, akkor az áram intenzitása $\frac{dJ}{dt}$ sebességgel megváltozik, minek következtében Faraday, Felici és Neumann tapasztalatainak megfelelően áramkörünkben még $-L\frac{dJ}{dt}$ elektromotoros erő lép fel, hol L az áramkör autoindukcziós koefficiense. Így tehát $t=0$ időpillanattól kezdve az Ohm-féle törvény

$$E-L\frac{dJ}{dt}=(W+W')J, \quad \text{(III)}$$

vagy

$$L\frac{dJ}{dt} + (W + W')J = E. \qquad \text{(III')}$$

Tehát a tapasztalat I-re nézve egy konstans együtthatókkal biró differencziálegyenletet szolgáltatott, melyből:

$$J = \frac{E}{W + W'} + Ae^{-\frac{W+W'}{L}t},$$

hol A az integráczió konstansa, melynek meghatározása az

$$(J)_{t=0} = \frac{E}{W}$$

kezdő feltétel alapján történik; és csakhamar találjuk, hogy

$$A = \frac{W'}{W}\frac{E}{W + W'},$$

következőleg:

$$J = \frac{E}{W + W'}\left(1 + \frac{W'}{W}e^{-\frac{W+W'}{L}t}\right). \qquad (1)$$

Tehát az indukált elektromotoros erő:

$$E_s = -L\frac{dJ}{dt} = \frac{W'E}{W}e^{-\frac{W+W'}{L}t}, \qquad (2)$$

az indukált áram pedig:

$$J_s = \frac{W'E}{W(W + W')}e^{-\frac{W+W'}{L}t}. \qquad (3)$$

Az indukált elektromotoros erő által az egész áramkörben végzett munka:

$$M_s = \int_0^\infty (W + W')J_s^2\,dt = \frac{L}{2}\left(\frac{W'E}{W(W + W')}\right)^2. \qquad (4)$$

A beiktatott ellenállásban végzett munka pedig

$$M_s' = \int_0^\infty W'J_s^2\,dt = \frac{W'}{W + W'}\cdot\frac{L}{2}\cdot\left(\frac{W'E}{W(W + W')}\right)^2. \qquad (5)$$

Az áramnyitáskor

$$W'=\infty,\quad \frac{W'}{W+W'}=1,\quad W=\text{véges},$$

tehát

$$E_s=\frac{W'E}{W}e^{-\frac{W+W'}{L}t},$$

$$M_s=M_s'=\frac{L}{2}\left(\frac{E}{W}\right)^2,$$

azaz az elektromotoros erő hirtelen felszökik s csak a beiktatott ellenállásban végez munkát, mely mint szikra jelenik meg. Ez az áram ideális nyitásának jelensége; a természetben nem valósitható meg, mivel nem lehet egy időpontban végtelen nagy ellenállást beiktatni.

Áramzáráskor pedig

$$W+W'=r=\text{véges},\quad W=\infty,\quad \frac{W'}{W}=-1,$$

tehát

$$E_s=-Ee^{-\frac{r}{L}t},$$

$$M_s=\frac{L}{2}\left(\frac{E}{r}\right)^2,$$

azaz az elektromos erő nem mindjárt szökik fel E-re és az indukált elektromotoros erő munkája megoszlik az egész áramkörben s igy a zárás helyére föltéve, hogy a zárás az imént említett ideális módon történt, ebből a munkából igen csekély rész jut.

Miután kikapcsolt ellenállásokban nincs áram, azért valahányszor W' negativ, M_s' mindig zérus, azaz az ellenállás kisebbitése alkalmával az indukált elektromotoros erő munkája megoszlik az egész vezetékben.

β) Áramkör kondenzátor nélkül, periodikus elektromotoros erővel.

Ha az áramkörünkben működő elektromotoros erő

$$E=E_0\sin(\omega t+\varepsilon),$$

akkor minden időpillanatban változik az áram intenzitása és pedig $\frac{dJ}{dt}$ sebességgel. Ennélfogva sinusos elektromotoros erő esetében bármely időpillanatban az Ohm-féle törvény:

$$E_0 \sin(\omega t+\varepsilon)-L\frac{dJ}{dt}=WI, \tag{IV}$$

vagy

$$L\frac{dJ}{dt}+WJ=E_0\sin(\omega t+\varepsilon). \tag{IV'}$$

Az

$$L\frac{dJ}{dt}+WJ=0$$

általános megoldása:

$$J_1=Ae^{-\frac{W}{L}t}.$$

A (IV') egyik partikuláris megoldása pedig:

$$J_2=A_1\sin(\omega t+\varepsilon+\delta).$$

Ha J_2-nek ezt az értékét a (IV')-be behelyettesítjük s azután $\sin(\omega t+\varepsilon)$ és $\cos(\omega t+\varepsilon)$ együtthatóit az egyenlet mindkét oldalán egyenlővé teszszük egymással, akkor nyerjük, hogy

$$-\omega L\sin\delta+W\cos\delta=\frac{E_0}{A_1},$$
$$\omega L\cos\delta+W\sin\delta=0,$$

honnan

$$A_1=\frac{E_0}{\sqrt{W^2+\omega^2L^2}},\ \operatorname{tg}\delta=-\frac{\omega L}{W}.$$

Ennélfogva a (IV') általános megoldása

$$J=\frac{E_0}{\sqrt{W^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t+\varepsilon+\delta)+Ae^{-\frac{W}{L}t}. \tag{6}$$

Ha az áram zárása $t=0$ időpontban történt, mikor is volt

$$(E)_{t=0}=E_0\sin\varepsilon,$$
$$(J)_{t=0}=0,$$

akkor

$$A=-\frac{E_0\sin(\varepsilon+\delta)}{\sqrt{W^2+\omega^2L^2}},$$

következőleg:

$$J = \frac{E_0}{\sqrt{W^2+\omega^2 h^2}} \sin(\omega t+\varepsilon+\delta) - \frac{E_0 \sin(\varepsilon+\delta)}{\sqrt{W^2+\omega^2 L^2}} e^{-\frac{W}{L}t}. \quad (7)$$

Ennélfogva a staczionér állapotot, mely lassankint bekövetkezik a következő egyenletek jellemzik:

$$E = E_0 \sin(\omega t+\varepsilon),$$
$$J = \frac{E_0}{\sqrt{W^2+\omega^2 L^2}} \sin(\omega t+\varepsilon+\delta), \quad \operatorname{tg}\delta = -\frac{\omega L}{W}. \quad (8)$$

Ezt a törvényt nevezzük a váltakozó áramokra vonatkozó Ohm-*féle törvénynek; W-t* Ohm-*féle ellenállásnak, ωL-t induktiv ellenállásnak,* $\sqrt{W^2+\omega^2 L^2}$-t pedig *váltakozó áramú ellenállásnak, látszólagos ellenállásnak, vagy impedanznak nevezzük.*

Ha a $t=0$ időpontban az állapot már staczionér volt, akkor

$$(J)_{t=0} = \frac{E_0 \sin(\varepsilon+\delta)}{\sqrt{W^2+\omega^2 L^2}},$$

tehát

$$A = 0,$$

következőleg a staczionér állapot folytatódik.

Ha pedig $t=0$ idő előtt az állapot staczionér volt ugyan, de az Ohm-féle ellenállás nem W, hanem r volt, akkor

$$(J)_{t=0} = \frac{E_0}{\sqrt{r^2+\omega^2 L^2}} \sin(\varepsilon+\delta_r), \quad \operatorname{tg}\delta_r = -\frac{\omega L}{r};$$

ennek megfelelően azután

$$A = \frac{E_0 \sin(\varepsilon+\delta_r)}{\sqrt{r^2+\omega^2 L^2}} - \frac{E_0 \sin(\varepsilon+\delta)}{\sqrt{W^2+\omega^2 L^2}}. \quad (9)$$

Az $r=\infty$ esetnek megfelel az áramkör zárása, a mit szemléltet a (7) egyenlet.

Az áramkör nyitása esetében $W=\infty$

$$J = \frac{E_0 \sin(\varepsilon+\delta_r)}{\sqrt{r^2+\omega^2 L^2}} e^{-\frac{W}{L}t}. \quad (10)$$

Az indukált elektromotoros erő:

$$E_s = -L\frac{dJ}{dt} = \frac{E_0 W \sin(\varepsilon+\delta_r)}{\sqrt{r^2+\omega^2 L}}\, e^{-\frac{W}{L}t}, \qquad (10')$$

hol ε az elektromotoros erő fázisa az áramkör megszakításának pillanatában, δ_r pedig az áramfázis eltolódása. Ha összegük olyan, melyre nézve $\sin(\varepsilon+\delta_r)$ igen kicsiny, akkor az indukált elektromotoros erő mérsékelt nagy, ellenben igen nagy, legnagyobb akkor, ha $\sin(\varepsilon+\delta_r)=1$.

A teljesség kedvéért még a következő — a gyakorlati életben fontos — fogalmakat mutatom be:

Ha már az áram staczionérré vált, akkor J^2-nak egy periodusra vonatkozó középértéke:

$$(J^2)_k = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\varepsilon+\delta}{\omega}}^{-\frac{\varepsilon+\delta}{\omega}+\frac{2\pi}{\omega}} J^2 dt = \frac{E_0^2}{2(W^2+\omega^2L^2)}.$$

$\sqrt{(J^2)_k}$-t *effektiv áramerősségnek* nevezzük és I-vel jelöljük, tehát

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{E_0}{\sqrt{W^2+\omega^2L^2}}.$$

Hasonlóképen az *effektiv feszültség*:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}},$$

tehát

$$I = \frac{E}{\sqrt{W^2+\omega^2L^2}}.$$

Az időegységben az áram által közölt munka:

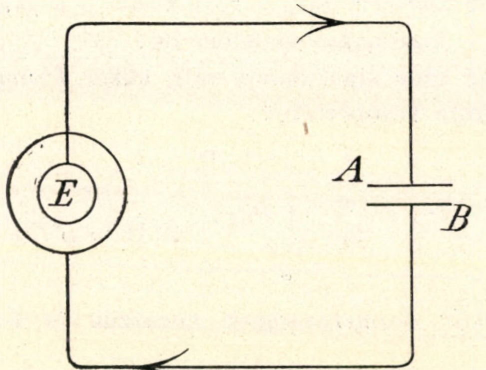
$$W = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\varepsilon}{\omega}}^{-\frac{\varepsilon}{\omega}+\frac{2\pi}{\omega}} EJdt = IE\cos\delta.$$

Ez a Galileo Ferraris-féle tétel.

$\cos\delta$-t *közlési tényezőnek* vagy *hatástényezőnek* nevezzük. Ha az I-t két komponensre $I\sin\delta$ és $I\cos\delta$-re bontjuk, akkor az elsőt *wattnélküli áramnak*, a másikat pedig *wattáramnak* nevezzük.

Tehát a Gallileo Ferraris-féle tétel így fogalmazható: *A váltakozó áram által közölt munka egyenlő az effektiv feszültség és wattáramerősség szorzatával.*

γ) Áramkör egymás után iktatott kondenzátorral és konstans elektromotoros erővel.



2. ábra.

Ha áramkörünkbe egymás után C kapaczitásu kondenzátort iktatunk be, akkor az előbbi jelölések megtartásával az áramkör $\overrightarrow{BEA}$ ágára vonatkozó Ohm-féle törvény

$$E + V_b - V_a - L\frac{dJ}{dt} = WJ. \qquad \text{(V)}$$

$V_b - V_a = V$-t a kondenzátor potencziális különbségének nevezzük, mely a kondenzátor töltésével (Q) és kapaczitásával a következő összefüggésben van:

$$V = CQ.$$

Ha dt idő alatt a kondenzátor töltése, azaz a villamosság B-ben dQ-val növekszik, akkor a vezető keresztmetszetén dt idő alatt átáramló villamos tömeg:

$$Jdt = - dQ,$$

következőleg:

$$J = - \frac{dQ}{dt} = - C \frac{dV}{dt}. \tag{VI}$$

Minek következtében (V) egyenletünk így módosul:

$$LC \frac{d^2V}{dt^2} + WC \frac{dV}{dt} + V + E = 0. \tag{V'}$$

Ha az

$$LC\nu^2 + WC\nu + 1 = 0 \tag{11}$$

egyenlet gyökei

$$(\nu_1, \nu_2) = \\ = \left(\frac{-WC + \sqrt{W^2C^2 - 4LC}}{2LC}, \frac{-WC - \sqrt{W^2C^2 - 4LC}}{2LC} \right), \tag{VII}$$

akkor az (V') egyenlet általános megoldása:

$$V = - E + A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t}, \tag{12}$$

tehát

$$J = - CA_1\nu_1 e^{\nu_1 t} - CA_2\nu_2 e^{\nu_2 t}. \tag{13}$$

Ha $t=0$ időben

$$(V)_{t=0} = V_0, \quad (i)_{t=0} = 0,$$

akkor

$$A_1 = \frac{V_0 + E}{\nu_2 - \nu_1} \nu_2, \quad A_2 = - \frac{V_0 + E}{\nu_2 - \nu_1} \nu_1,$$

következőleg:

$$\left. \begin{aligned} V &= - E + \frac{V_0 + E}{\nu_2 - \nu_1} (\nu_2 e^{\nu_1 t} - \nu_1 e^{\nu_2 t}), \\ J &= - C\nu_1\nu_2 \frac{V_0 + E}{\nu_2 - \nu_1} (e^{\nu_1 t} - e^{\nu_2 t}), \end{aligned} \right\} \tag{VIII}$$

mely egyenletek csillapodó elektromos mozgást képviselnek (l. VII). A staczionér állapot

$$V = - E; \quad i = 0.$$

Ha tehát $t=0$ időben az állapot már staczionér volt, akkor $V_0 = -E$, következőleg a staczionér állapot továbbra is staczionér marad. Azaz: *Az ellenállás nagyobbítása, vagy kisebbítése a staczionér állapotot nem változtatja.*

A staczionér állapot kizárása után a következő esetek fordulhatnak elő:

1. Ha

$$W^2 - \frac{4L}{C} > 0,$$

akkor ν_1 és ν_2 negativok, tehát a (VIII) alatti egyenletek csillapodó, de nem periodikus mozgást jellemeznek.

2. Ha

$$W^2 - \frac{4L}{C} = 0,$$

akkor $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ és az általános megoldás:

$$V = -E + (A_1 + tA_2)e^{\nu t}, \quad J = -C\frac{dV}{dt} \quad (A_1 = V_0 + E, \; A_2 = -\nu A_1),$$

mely szintén csillapodó nem periodikus áramlást jelent.

3. Ha pedig

$$W^2 - \frac{4L}{C} < 0,$$

akkor a

$$\nu_1 = -\frac{W}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{W^2}{4L^2}} = a + \omega' i,$$

$$\nu_2 = a - \omega' i$$

jelölések alkalmazásával s annak megfontolásával, hogy

$$e^{\pm \omega' t i} = \cos \omega' t \pm i \sin \omega' t,$$

a (VIII) alatt levő egyenletek következőképen módosulnak:

$$V = -E + \frac{V_0 + E}{\omega'}(\omega' \cos \omega' t - a \sin \omega' t)e^{at},$$

$$J = \frac{V_0 + E}{\omega' L} e^{at} \sin \omega' t.$$

Ha még

$$\sin \delta' = \frac{\omega'}{\sqrt{a^2 + \omega'^2}}, \quad \cos \delta' = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + \omega'^2}},$$

$$a^2 + \omega'^2 = \nu_1 \nu_2 = \frac{1}{LC},$$

akkor

$$V = -E + \frac{V_0+E}{\omega' \sqrt{LC}} e^{\alpha t} \sin(\omega' t + \delta'),$$

$$J = \frac{V_0+E}{\omega' L} e^{\alpha t} \sin \omega' t, \qquad \text{(IX)}$$

$$\operatorname{tg} \delta' = -\frac{\omega'}{\alpha},$$

mely egyenletck csillapodó váltakozó áramú mozgást jellemeznek.

Ha kondenzátorunknak töltése nem volt, akkor $V_0 = 0$ és egyenleteink egy kondenzátornak az állandó elektromotoros erejű villamos forráshoz való kapcsolásának a jelenségét szemléltetik.

Ha pedig $E=0$, akkor egyenleteink a kondenzátor kisülésének a jelenségét tartalmazzák.

Ennek a tárgynak további elementáris magyarázata feladatunkon kívül esik. Csak azt jegyzem meg, hogy a kondenzátorok kisülésének problémáját először W. THOMSON oldotta meg 1853-ban.[1]

δ) Áramkör egymás után kapcsolt kondenzátorral s periodikus elektromotoros erővel.

Ha a 2. ábrában feltüntetett áramkörben ható elektromotoros erő

$$E = E_0 \sin(\omega t + \varepsilon),$$

akkor az (V') képlet erre az esetre így módosul:

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + WC \frac{dV}{dt} + V + E_0 \sin(\omega t + \varepsilon) = 0. \qquad \text{(V'')}$$

Legyen ennek az egyenletnek egyik partikuláris megoldása

$$V_1 = A \sin(\omega t + \varepsilon + \delta).$$

A és δ meghatározására a *β)* alatti fejtegetésekhez hasonlóan a következő egyenleteket találjuk:

---

[1] Philosophical Magazine 5. k. 393. l. 1853. Lásd még SUTÁK JÓZSEF: «A villamosság körébe tartozó újabb kutatások» 3. §-át.

$$(1-\omega^2 LC)\cos\delta - WC\omega\sin\delta = -\frac{E_0}{A},$$
$$(1-\omega^2 LC)\sin\delta + WC\omega\cos\delta = 0,$$

melyeket ebbe az alakba is írhatunk:

$$\omega\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)\cos\delta + W\sin\delta = \frac{E_0}{\omega C A},$$
$$\omega\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)\sin\delta - W\cos\delta = 0,$$

honnan

$$A = \frac{E_0}{\omega C\sqrt{W^2+\omega^2\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}},$$
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{W}{\omega\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)}\cdot$$

Ennélfogva az (V″) általános megoldása:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{E_0\sin(\omega t+\varepsilon+\delta)}{\omega C\sqrt{W^2+\omega^2\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}} + A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t},\\ J &= -C\frac{dV}{dt}\cdot \end{aligned}\right\} \quad \text{(X)}$$

Ha $t=0$ időpontban $(J)_{t=0}=0$, $(V)_{t=0}=V_0$, akkor

$$V_0 - A\sin(\varepsilon+\delta) = u, \quad A\omega\cos(\varepsilon+\delta) = v$$

jelölések alkalmazásával A_1 és A_2 meghatározására a következő egyenleteket nyerjük:

$$A_1 + A_2 = u,$$
$$\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 = v,$$

honnan

$$A_1 = \frac{u\nu_2 - v}{\nu_2-\nu_1}, \quad A_2 = -\frac{u\nu_1 - v}{\nu_2-\nu_1}\cdot$$

Ha ν_1 és ν_2 valósak, akkor a (X) egyenletek egy nem csillapodó periodikus és egy csillapodó nem periodikus áram jellemzői.

Ha pedig

$$W^2 - \frac{4L}{C} < 0,$$

akkor a föntebbi jelölések megtartásával

$$(\nu_1, \nu_2 = a + \omega' i,\ a - \omega' i),$$

$$A_1 = \frac{ua - v - u\omega' i}{-2\omega' i}, \quad A_2 = -\frac{ua - v + u\omega' i}{2\omega' i}.$$

Ennélfogva a 8) pontban követett eljárással a megoldást a következő alakba transzformálhatjuk:

$$V = \frac{E_0 \sin(\omega t + \varepsilon + \delta)}{\omega C \sqrt{W^2 + \omega^2 \left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(ua - v)^2 + \omega'^2 u^2}}{\omega'} e^{at} \sin(\omega' t + \delta'), \tag{X'}$$

$$i = -C \frac{dV}{dt},$$

$$\sin \delta' = \frac{u\omega'}{\sqrt{(ua - v)^2 + \omega'^2 u^2}}, \quad \cos \delta' = -\frac{ua - v}{\sqrt{(ua - v)^2 + \omega'^2 u^2}}.$$

Tehát a vezetőben *két periodikus áram jön létre, ezek egyike csillapodó.* Ennek a két áramnak az együttműködéséből kimagyarázhatók a Strasser és Zenneck felfedezte felső rezgések,[1] melyeknek theoriáját először W. Rogowszki törekedett felépíteni.[2]

Staczionér állapot esetére:

$$V = \frac{E_0 \sin(\omega t + \varepsilon + \delta)}{\omega C \sqrt{W^2 + \omega^2 \left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}},$$

---

[1] B. Strasser und J. Zenneck: Über phasewechselnde Oberschwingungen. Ann. d. Phys. 1896. Vierte Folge. B. 20. p. 759.

[2] W. Rogowszki: Theorie der Resonanz phasewechselnder Schwingungen. Ann. d. Phys. 1896. B. 20. p. 766.

$$J=\frac{E_0 \sin\left(\omega t+\varepsilon+\delta-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{W^2+\omega^2\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}}, \tag{14}$$

$$E=E_0 \sin(\omega t+\varepsilon).$$

Tehát a jelen esetben az impedanz

$$\sqrt{W^2+\omega^2\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}.$$

$\frac{1}{\omega C}$-t *kapaczitásbeli ellenállásnak nevezzük.* Ha az induktiv és kapaczitásbeli ellenállások egyenlők, azaz

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}, \quad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}},$$

akkor

$$\delta=\frac{\pi}{2},$$

$$J=\frac{E_0}{W}\sin(\omega t+\varepsilon),$$

tehát az áram olyan, mintha sem kapaczitásbeli, sem induktiv ellenállás nem volna jelen. Ezt a jelenséget a *rezonanczia* jelenségének nevezzük.

Ha tehát áramkörünk rezonancziában van az elektromotoros erővel s $t=0$ időben ε is zérus, akkor

$$v=0, \quad u=V_0-\frac{E_0}{\omega WC}=V_0-A,$$

tehát az általános megoldás

$$V=\frac{E_0}{\omega WC}\cos\omega t+\frac{(V_0-A)\,\omega}{\omega'}e^{\alpha t}\sin(\omega' t+\delta'),$$

$$\operatorname{tg}\delta'=-\frac{\omega'}{\alpha}, \tag{15}$$

$$J=\frac{E_0 \sin\omega t}{W}+\frac{V_0-A}{\omega' L}e^{\alpha t}\sin\omega' t.$$

Abban a különös esetben, melyben az Ohm-féle ellenállás elhanyagolható:

$$\omega = \omega', \quad \delta' = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} V &= \left[\frac{E_0}{\omega WC} + \left(V_0 - \frac{E_0}{\omega WC}\right) e^{\alpha t}\right] \cos \omega t, \\ i &= \left[\frac{E_0}{W} + \frac{1}{\omega L}\left(V_0 - \frac{E_0}{\omega WC}\right) e^{\alpha t}\right] \sin \omega t. \end{aligned} \tag{16}$$

Ha pedig kezdetben V_0 is zérus volt, akkor

$$\begin{aligned} V &= \frac{E_0}{\omega WC}(1-e^{\alpha t}) \cos \omega t, \\ i &= \frac{E_0}{W}(1-e^{\alpha t}) \sin \omega t. \end{aligned} \tag{17}$$

Ha $t=0$ időben áramkörünk r Ohm-féle ellenállással már staczionér állapotban volt és aztán az Ohm-féle ellenállást r-ről $W=\infty$-re szöktetjük fel, akkor a (11) egyenlet gyökei

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = -\frac{W}{L},$$

és az (V″) általános megoldása

$$\begin{aligned} V &= A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t}, \\ J &= -C\frac{dV}{dt}. \end{aligned}$$

A $t=0$ időhöz tartozó J_0, V_0 kezdő értékeket a (14) alatti egyenletekből úgy nyerjük, ha azokban t helyett 0-t, W helyett pedig r-t írunk. Az A_1 és A_2 meghatározására szolgáló egyenletek tehát

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= V_0, \\ -C\nu_2 A_2 &= J_0. \end{aligned}$$

Következőleg

$$\begin{aligned} V &= \left(V_0 + \frac{J_0}{C\nu_2}\right) e^{\nu_1 t} - \frac{J_0}{C\nu_2} e^{\nu_2 t}, \\ J &= J_0 e^{\nu_2 t}. \end{aligned} \tag{18}$$

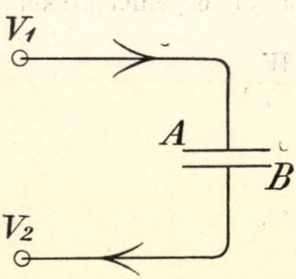
Mivel $|\nu_2|$ igen nagy, $|\nu_1|$ meg igen kicsiny, azért az áram hirtelen megszakad, de a kondenzátor V_0 potencziálisát sokáig megtartja.

Az indukált elektromotoros erő:

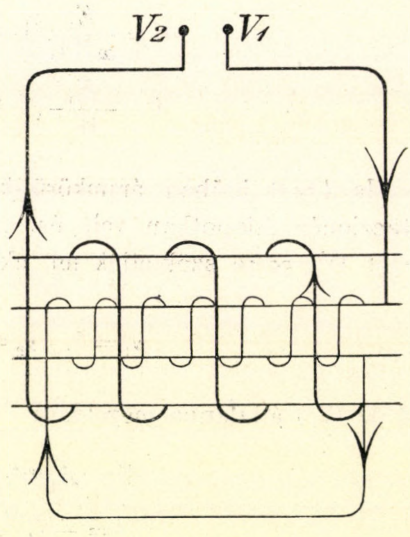
$$E_s = -L\frac{dJ}{dt} = -L\nu_2 J_0 e^{\nu_2 t} = \frac{E_0 W \sin\left(\varepsilon+\delta-\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{r^2+\omega^2\left(L-\frac{1}{\omega^2 C}\right)^2}} e^{-\frac{W}{L}t}.$$

Tehát a *kapaczitás bekapcsolása az áram megszakításakor fellépő elektromotoros erőt nem csökkenti* (l. 10'), *de az áram intenzitását a rezonanczia esetében jelentékenyen növeli.*

Megjegyzendő, hogy kutatásaink oly vezetőre is



3. ábra.



4. ábra.

érvényesek, melynek V_1 és V_2 végeit staczionér potencziális állapoton — V_1, V_2 — tartjuk, csakhogy ekkor képleteinkben elektromotoros erőül $V_1 - V_2 = E$ veendő.

II. Szekundér tekercscsel ellátott kapaczitásnélküli áramkör konstans elektromotoros erővel.

Az egyszerűbb tárgyalást igénylő esetek egyikével állunk szemben akkor is, mikor egy R_1 ellenállású és L_{11} autoindukcziós együtthatójú vezetőt, melyben E_1 konstans elektromotoros erő működik egy oly szekundér tekercscsel látunk el, melynek ellenállása W_2 és autoindukcziós együtthatója L_{22}; a kölcsönös indukcziós koefficziens legyen L_{12}. Staczionér állapot esetére a két vezetőben keringő áram intenzitásait rendre J_1, J_2-vel jelölvén:

$$\begin{aligned} R_1 J_1 &= E_1, \\ W_2 J_2 &= 0. \end{aligned} \tag{XI}$$

De ha a $t=0$ időben a primértekercs ellenállását R_1-ről W_1-re szöktetjük fel, akkor a primér áramkörben még

$$-\left(L_{11}\frac{dJ_1}{dt}+L_{12}\frac{dJ_2}{dt}\right),$$

a szekundér áramkörben pedig

$$\left(L_{21}\frac{dJ_2}{dt}+L_{22}\frac{dJ_2}{dt}\right)$$

elektromotoros erő lép fel, tehát a $t=0$ időtől kezdve az Ohm-féle törvény a két áramkörre nézve ily alakú

$$\begin{aligned} W_1 J_1 &= E_1 - L_{11}\frac{dJ_1}{dt} - L_{12}\frac{dJ_2}{dt}, \\ W_2 J_2 &= \quad -L_{21}\frac{dJ_1}{dt} - L_{22}\frac{dJ_2}{dt}. \\ &(L_{12}=L_{21}) \end{aligned} \tag{XII}$$

Ha már most a $\frac{d}{dt}$ műveletet D-vel jelöljük és egyszer s mindenkorra elfogadjuk az

$$M_{ii}(D)=W_i+L_{ii}D, \quad M_{ik}(D)=L_{ik}D$$

jelöléseket, akkor a (XII) alatt levő egyenleteket a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned} M_{11}(D)J_1+M_{12}(D)J_2 &= E_1, \\ M_{21}(D)J_1+M_{22}(D)J_2 &= 0. \end{aligned} \tag{XII'}$$

Ha a rövidség kedvéért

$$\begin{vmatrix} M_{11}(D) & M_{12}(D) \\ M_{21}(D) & M_{22}(D) \end{vmatrix} = \Delta(D),$$

akkor a (XII') egyenletekből a lineáris algebrai egyenletek megoldási módszerével nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \Delta(D) J_1 &= W_2 E_1, \\ \Delta(D) J_2 &= 0. \end{aligned} \tag{XIII}$$

Ha tehát a

$$\Delta(\nu) = 0 \tag{19}$$

egyenlet gyökeit ν_1 és ν_2-vel jelöljük, akkor a (XIII) rendszer megoldása:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{E_1}{W_1} + A_1 e^{\nu_1 t} + B_1 e^{\nu_2 t}, \\ J_2 &= \qquad A_2 e^{\nu_1 t} + B_2 e^{\nu_2 t}. \end{aligned} \tag{20}$$

Ha J_1 és J_2 ezen értékeit a (XII') alatt levő egyenletekbe behelyettesítjük s azután $e^{\nu_1 t}$ és $e^{\nu_2 t}$ együtthatóit zérussá teszszük, akkor nyerjük a konstansok között levő relácziókat, melyekből aztán találjuk, hogy

$$\begin{aligned} A_1 &= -AM_{12}(\nu_1), & B_1 &= -BM_{12}(\nu_2), \\ A_2 &= AM_{11}(\nu_1), & B_2 &= BM_{11}(\nu_2). \end{aligned}$$

Ha már most ezeket az értékeket behelyettesítjük a (20) alatt levő egyenletekbe s aztán t helyett zérust, J_1 és J_2 helyett pedig rendre $\frac{E_1}{R_1}$-et és 0-t írunk, akkor A és B számára két egyenletet nyerünk, melyekből

$$\begin{aligned} A &= -E_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{W_1}\right)\frac{M_{11}(\nu_2)}{L_{12}W_1(\nu_1-\nu_2)}, \\ B &= E_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{W_1}\right)\frac{M_{11}(\nu_1)}{L_{12}W_1(\nu_1-\nu_2)}. \end{aligned}$$

Ennélfogva:

$$\begin{aligned} J_1 = \frac{E_1}{W_1} + E_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{W_1}\right)\frac{1}{\nu_1-\nu_2}\Bigg[\left(\nu_1 + \frac{L_{11}W_2}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}\right)e^{\nu_1 t} - \\ - \left(\nu_2 + \frac{L_{11}W_2}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}\right)e^{\nu_2 t}\Bigg], \\ J_2 = E_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{W_1}\right)\frac{W_1 L_{12}}{(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)(\nu_1-\nu_2)}(e^{\nu_1 t} - e^{\nu_2 t}). \end{aligned} \tag{XV}$$

A (19) alatt levő egyenlet gyökei negativek. Ha ν_1 a nagyobb gyök, akkor

$$\nu_1 + \frac{L_{11}W_2}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2} =$$

$$= \frac{L_{11}W_2 - L_{22}W_1 + \sqrt{(L_{11}W_2-L_{22}W_1) + 4W_1W_2L_{12}^2}}{2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)} > 0\,;$$

hasonlóképen találjuk, hogy

$$\nu_2 + \frac{L_{11}W_2}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2} < 0.$$

Áramzáráskor $R_1 = \infty$, $W_1 =$ véges, azért a primértekercsben az indukált elektromotoros erő

$$E'_{1s} = J_1W_1 - E_1$$

$-E_1$-ről zérusra száll fel. A szekundér tekercsben pedig az indukált elektromotoros erő 0-ról lesülyed

$$E'_{2s} = -\frac{W_2L_{12}E_1}{(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)(\nu_1-\nu_2)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_1}}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}-1\right)\text{-re} \tag{21}$$

s aztán ismét zérusra emelkedik.

Áramnyitáskor $R_1 =$ véges, $W_1 = \infty$, tehát

$$\nu_1 = -\frac{W_2}{L_{22}}, \quad \nu_2 = -\frac{L_{22}W_1}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2},$$

ennélfogva a primér és szekundér tekercsekben indukált elektromotoros erők rendre:

$$\left.\begin{aligned} E_{1s} &= J_1W_1 - E_1 = \frac{W_1E_1}{R_1}\, e^{-\frac{L_{22}W_1}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}t}, \\ E_{2s} &= J_2W_2 = \frac{W_2L_{12}E_1}{L_{22}R_1}\left(e^{-\frac{W_2}{L_{22}}t} - e^{-\frac{L_{22}W_1}{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Tehát a *primér tekercsben indukált abnormis nagy elektromotoros erő annál gyorsabban eltűnik, minél tökéletesebb a mágneses bekapcsolás,* azaz, minél kisebb $L_{11}L_{22}-L_{12}^2$.

S mivel a jelen esetben $\nu_2-\nu_1$ elég nagy megközelítéssel ν_1-gyel egyenlő, azért a szekundér tekercsben az indukált elektromotoros erő 0-ról

$$E_{2s_{max}} = \frac{W_2 L_{12} E_1}{L_{22} R_1}\left(1 - \frac{W_2(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)}{W_1 L_{22}^2}\right)\text{-ra}$$

szökik fel s aztán ismét zérusra száll alá. Tehát a szekundér tekercsben annál *magasabbra szökik fel az indukált elektromotoros erő, minél tökéletesebb a mágneses bekapcsolás.*

Tökéletes mágneses bekapcsolás esetére

$$L_{12} = \sqrt{L_{11}L_{12}},$$

tehát

$$E_{2s_{max}} = \frac{W_2}{R_1} E_1 \sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}}} = \frac{W_2}{R_1}\,\frac{N_1}{N_2} E_1,$$

hol N_1 és N_2 a primér, illetve a szekundér tekercs tekervényeinek a számát jelentik.

A primér tekercsbe bekapcsolt dielektrikumban az indukált áram létesítette meleg:

$$M_{1s} = (W_1-R_1)\int_0^\infty J_{1s}^2\,dt = \frac{W_1-R_1}{2W_1L_{22}R_1^2}(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)E_1^2.$$

Tekintettel föltevéseinkre:

$$\frac{W_1-R_1}{W_1} = 1,$$

következőleg

$$M_{1s} = \frac{(L_{11}L_{22}-L_{12}^2)E_1^2}{2L_{22}R_1^2},$$

a mi az indukált áram által az egész áramkörben létesített melegmennyiséggel egyenlő. Ennélfogva az *indukált áram létesítette meleg legnagyobb része a bekapcsolt dielektrikumban jön létre s ez a meleg a mágneses bekapcsolás tökéletesítésével együtt folyton csökken.*

A (III'), (IV'), (V'), (V''), (XII) alapegyenletek egynémelyikének többé-kevésbbé sikerült tárgyalását megtalálhatjuk a következő kézikönyvekben: Hoor M.: Elektrotechnika I. R. 1893. — G. Benischke: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. 1907. — G. Grassi: Principii scientifici della ellettrotecnica. 1907. — J. Wallentin: Einleitung in die theoretische Elektricitätslehre. 1904. — A. Winkelmann: Handbuch der Physik. V. B. 2. Th. II. Auflage 1908.

Suták József.

A FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT ALAPEGYENLETEIRŐL.[1]

A közönséges rugalmassági elméletben tudvalevőleg feltételezzük azt, hogy ha a test vagy általában a közeg, tetszőleges belső pontján át végtelen kicsiny felületelemet fektetünk, akkor az ennek egyik oldalán lévő anyagnak a másik oldalon lévő anyagra gyakorolt hatását egy a felületelem területével arányos végtelen kicsiny erő, a feszültségi erő, adja meg. A feszültségi erőt osztva a hozzátartozó felületelem területével kapjuk a fajlagos feszültséget vagy röviden feszültséget, a mely tehát meghatározott irányú, értelmű és általában véges nagyságú mennyiség vagyis vektor. A felületelemnek állását, valamint azt is, hogy a melyik oldalán fekvő anyagra gyakorolt erőhatásról van szó, egyértelmüleg jellemezhetjük a felületelem két normális-ága valamelyikének, például a kifelé mutatónak megadásával. Eszerint tehát az illető pontból kiinduló végtelen sok félegyenes mindenikéhez fog tartozni, mint normális-irányhoz, egy bizonyos vektor, a feszültségi vektor; és a feszültségi állapot akkor válik ismertté, ha ismerjük a feszültségi vektornak a normális irányától való függését.

Állapodjunk meg a következő jelölési módban. Az n normálisú felületelemhez tartozó feszültség legyen P_n és ennek az i irányra való derékszögű vetülete legyen I_n; felvévén tehát az (x, y, z) térbeli derékszögű koordináta-rendszert, a három koordinátasíkkal párhuzamos három felületelemre eső feszültségeknek és ezek derékszögű alkotóinak jelölései a következők lesznek:

$$P_x(X_x, Y_x, Z_x); \quad P_y(X_y, Y_y, Z_y); \quad P_z(X_z, Y_z, Z_z).$$

[1] Előadatott a Társulat 1908 április 27-iki ülésén.

Ismeretes, hogy az egy pontban uralkodó feszültségi állapot teljesen jellemezhető ennek három alaptulajdonságával. Az első alaptulajdonság szerint a feszültség fogalma hódol az actió és reactió egyenlősége elvének, a mennyiben bármely felületelem egyik oldalán fekvő anyagra eső feszültségvektor épen ellentettje a másik oldalához tartozó feszültségvektornak. Ha tehát az n irány ellentettje az n' irány, akkor

$$P_{n'} = -P_n. \tag{1}$$

A második alaptulajdonságot a következő összefüggések fejezik ki:

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \tag{2}$$

a melyek szerint a hat nyirófeszültség közül kettő-kettő egymással egyenlő, úgyhogy a koordinátarendszerünk meghatározta három felületelemre eső három feszültségvektort nem kilencz, hanem hat számadat jellemzi.

A harmadik alaptulajdonság azt a tényt fejezi ki, hogy az imént említett hat számadat már tökéletesen meghatározza az illető pontban uralkodó feszültségi állapotot, a mennyiben segítségükkel bármelyik felületelemhez tartozó feszültségvektor előállítható. Ha ugyanis a tetszőleges állású felületelem n normálisának iránycosinusai a, b, c, akkor P_n feszültség derékszögű alkotói a következő kifejezésekkel vannak megadva:

$$\begin{aligned} X_n &= aX_x + bX_y + cX_z, \\ Y_n &= aY_x + bY_y + cY_z, \\ Z_n &= aZ_x + bZ_y + cZ_z. \end{aligned} \tag{3}$$

Ezt a három alaptulajdonságot elemi úton tudvalevőleg úgy bizonyíthatjuk be, hogy a pont környezetében alkalmas módon választott térfogatelemet veszünk fel és kifejezzük azt, hogy a reája ható tömegerők és feszültségi erők egyensúlyi rendszert alkotnak. Így az első tulajdonságot az elemi lemeznek haladás elleni egyensúlyából, a másodikat az elemi derékszögű hasáb forgás elleni egyensúlyából és végre a harmadik tulajdonságot az elemi tetraéder haladás elleni egyensúlyából szokás bebizonyítani.

Némelyik teljességre törekvő szerző mellékesen megemlíti még azt is, hogy a második alaptulajdonságban kifejezésre jutó törvényszerűség még általánosítható is, a mennyiben r és s két egészen tetszőleges irányt jelentvén, mindig

$$S_r = R_s, \tag{I}$$

(vagyis az r normálisú felületelem feszültségének s irányú alkotója nagyságra és előjelre nézve megegyezik az s normálisú felületelem r irányú alkotójával) és ennek igazságát az alapegyenletek felhasználásával analitikai úton bizonyítják be.

Ez a reciprocitási tétel az irodalomban nagyon mostoha elbánásban részesül, mert vagy fel sem említik, vagy, ha kuriózumképen fel is említik, semmi hasznát sem veszik; pedig ezt a sorsot épenséggel nem érdemli meg. Könnyen belátható ugyanis, hogy ez a reciprocitási tétel már egymagában véve s tökéletesen jellemzi a feszültségvektor függését a felületelem állásától, a mennyiben a fentiekben elősorolt három alaptulajdonság mindenike tüstént levezethető belőle. Mindenekelőtt igazoljuk ezen állításunk helyességét. Az első alaptulajdonság levezetésére vegyük fel az ellentétes n és n' irányokat, meg a tetszőleges s irányt. Ekkor a (I) miatt

$$S_n = N_s,$$

$$S_n' = N_s' = -N_s,$$

úgyhogy:

$$S_n' = -S_n$$

és mivel ez minden s irányra egyaránt igaz, azért szükségképen

$$P_n' = -P_n.$$

A mi a második alaptulajdonságot kifejező (2) egyenleteket illeti, ezek, mint speczialis esetek, közvetetlen következményei a reciprocitási tételt megadó (I) egyenletnek.

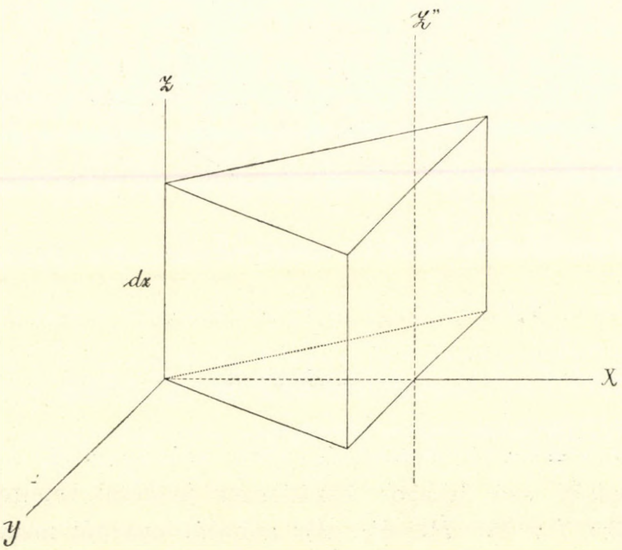
De ugyanigy áll a dolog a harmadik alaptulajdonsággal is.

Ha ugyanis adottnak képzeljük a koordinátasíkokkal párhuzamos felületelemekre eső P_x, P_y, P_z feszültségeket és keressük az a, b, c iránycosinusú tetszőleges n normálisú felületelemhez tartozó P_n feszültséget, akkor ennek derékszögű alkotói a reciprocitási tétel alkalmazásával a következők lesznek:

$$X_n = N_x = aX_x + bY_x + cZ_x\,,$$
$$Y_n = N_y = aX_y + bY_y + cZ_y\,,$$
$$Z_n = N_z = aX_z + bY_z + cZ_z\,.$$

a mik a (2) összefüggések miatt valóban a (3) egyenletek.

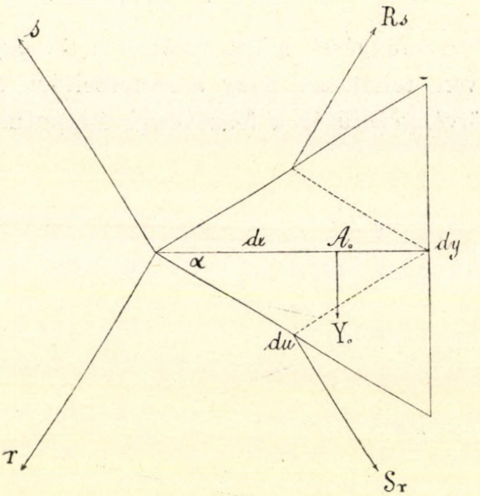
Igazolva van tehát az, hogy a reciprocitási tételben megnyilatkozó törvényszerűség a feszültségi állapotnak kimerítően



1. ábra.

jellemző tulajdonságát alkotja, minélfogva indokoltnak mutatkozik az a tárgyalási mód, a mely közvetetlen úton mutatja meg az alapvető reciprocitási tételnek igazságát és azután ebből vezeti le a három alaptulajdonságot. Az csupán a kérdés, hogy vajjon lehetséges-e egyszerű elemi úton közvetetlenül bebizonyitani a reciprocitási tételt?

A kívánt bizonyítás rendkívül egyszerűen végezhető el, ha csak alkalmas módon választjuk meg a térfogatelem alakját. Válasszunk térfogatelem gyanánt egy egyenlőszárú háromszög alapú egyenes hasábot, a melynek szár-oldallapjai legyenek merőlegesek az r, illetőleg s irányokra. Vezessük be az 1. ábrán látható térbeli derékszögű koordinátarendszert, továbbá a következő jelöléseket: a hasáb magassága $= dz$, a háromszögalap



2. ábra.

magassága $= dx$, alapja $= dy$ és szárhosszúsága $= dn$. A hasáb határlapjaira eső fajlagos feszültségek jelölései rendre a következők: P_r, P_s, $\bar{P}_x$, $P_{z'}$, $\bar{P}_z$; a hasáb anyagát megtámadó fajlagos térfogati erő legyen $P_0 (X_0, Y_0, Z_0)$. Bármelyik határlapra nehezedő feszültségi erőnek támadópontja a határlap súlypontja és nagysága a fajlagos feszültségnek meg a határlap területének szorzata; hasonlóképen a hasáb anyagát megtámadó térfogati erőnek támadópontja a hasáb A_0 súlypontja és nagysága a fajlagos térfogati erőnek meg a hasáb térfogatának szorzata. Az elemi hasábot megtámadó összes erők egyensúlyi rendszert alkotnak, tehát bármely egyenesre vonatkozó statikai nyomatékaik algebrai összege zérus. Vegyük nyomatéki tengelynek azt a z'' egyenest, melyben a prizma élén átmenő szimmetria-sík metszi a szemben fekvő határlapot. A $\bar{P}_x$-nek megfelelő erő nyomatéka zérus; a többi erő nyomatékát meg számítsuk ki úgy, hogy a támadópontnak a z'' egyenestől való merőleges távolságát, a kart, megszorozzuk az erő x, y síkkal párhuzamos alkotójának a karra merőleges vetületével. A 2. ábra előtünteti a hasáb középső keresztmetszetébe eső fajlagos erők figyelembe veendő alkotóit.

Így kapjuk a következő nyomatéki egyenletet:

$$-S_r\,dndz\,.\,\tfrac{1}{2}\,dn + R_s\,dndz\,.\,\tfrac{1}{2}\,dn - Y_0\tfrac{1}{2}\,dxdydz\,.\,\tfrac{1}{3}\,dx + \\ + Y_{z'}\tfrac{1}{2}\,dxdy\,.\,\tfrac{1}{3}\,dx + \bar{Y}_z\tfrac{1}{2}\,dxdy\,.\,\tfrac{1}{3}\,dx = 0.$$

Ha azonban tekintetbe veszszük azt, hogy

$$\bar{Y}_z = Y_z + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\,dz, \quad dx = dn\cos\alpha, \quad \frac{dy}{2} = dn\sin\alpha$$

és ha a negyedrendű végtelen kicsiny tagokat elhanyagoljuk a harmadrendűek mellett, akkor azt kapjuk, hogy

$$(R_s - S_r)\tfrac{1}{2}\,dz\,(dn)^2 + (Y_{z'} + Y_z)\,\tfrac{1}{3}\,(dn)^3\cos^2\alpha\sin\alpha = 0,$$

vagyis

$$(R_s - S_r)\frac{dz}{2} + (Y_{z'} + Y_z)\frac{dn}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha = 0,$$

de mivel dz és dn független egymástól és az egyenlet igaz tartozik lenni azoknak tetszőleges értékeire, azért szükségképen kell, hogy a dz és dn szorzói külön-külön zérusok legyenek, tehát nevezetesen kell, hogy

$$R_s = S_r,$$

a mivel a kivánt bizonyitás megtörtént.

A reciprocitási tétel használatának egy további előnye abban áll, hogy belőle minden számítás nélkül azonnal kiadódik a feszültségi állapot több törvényszerűsége. Ilyenek gyanánt felemlítjük a következőket.

Jelentsen r, s két tetszőleges irányt és a tőlük meghározott sík normálisa legyen τ, a P_r, P_s feszültségvektorok iránya rendre ρ, σ és a két utóbbi irány meghatározta sík normálisa legyen t. Keressük a t irányhoz tartozó feszültségvektor irányát. Mivel

$$R_t = T_r = 0,$$
$$S_t = T_s = 0,$$

azért a keresett irány merőleges úgy az r-re, mint az s-re, vagyis beleesik az r, s sík τ normálisába. Ha továbbá n egy egészen tetszőleges, az r, s síkba eső irányt jelent, akkor

$$T_n = N_t = 0,$$

vagyis az r, s síkban fekvő tetszőleges irányhoz tartozó feszültségvektor benne fekszik a ρ, σ síkban. E két eredmény összefoglalva azt mondja: az egy síkban fekvő normális irányokhoz tartozó feszültségvektorok mind egy ugyanazon (általában másik) síkban feküsznek és e második sík normálisához tartozó feszültségvektor beleesik az első sík normálisába. A két sík akkor és csakis akkor esik össze, ha az r, s síkban fekvő felületelemhez tartozó feszültségvektor reája merőlegesen áll, mikor is a feszültséget főfeszültségnek nevezzük.

A főfeszültségek létezésének kimutatása legegyszerűbben sikerül az ismeretes analitikai úton, de már a részletes vizsgálatnál ismét jó szolgálatot tesz a reciprocitási tételnek közvetetlen felhasználása. Így például azonnal megkapjuk azt a tételt, hogy két különböző nagyságú főfeszültség egymásra merőlegesen áll. Legyen ugyanis a két főirány r, s, a köztük lévő szög φ és a két főfeszültség P_r, P_s; ekkor az

$$S_r = R_s,$$

követelés azt adja, hogy

$$P_r \cos\varphi = P_s \cos\varphi,$$

de mivel a feltevés szerint

$$P_r \neq P_s,$$

azért szükségképen

$$\cos\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Ha van egy olyan felületelem, a melyhez zérus feszültség tartozik (vagyis ha az egyik főfeszültség zérus), akkor bármelyik normálisirányhoz tartozó feszültségvektor benne fekszik a feszültségmentes felületelem síkjában. Legyen ugyanis a feszültségmentes felületelem normálisának iránya r és n egy tetszőleges normálisirány, ekkor aztán

$$R_n = N_r = 0.$$

vagyis az n irányhoz tartozó feszültségvektor valóban merőleges az r irányra.

Ebből továbbá azonnal következik az is, hogyha két feszültségmentes felületelem létezik, akkor bármely normálisirányhoz tartozó feszültségvektor beleesik a két felületelem síkjának metszőegyenesébe és hogy mindenik, ezen metszőegyenesen átmenő felületelem ugyancsak feszültségmentes.

Teljesség kedvéért említsünk meg még egy dolgot. A feszültségi állapotnak pontról-pontra való változása tudvalevőleg nem lehet egészen tetszőleges, mert a hat jellemző feszültségi alkotó, mint a koordinátáknak függvénye, tartozik kielégiteni a következő három parcziális differencziálegyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X_0 &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y_0 &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z_0 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ezeket, mint ismeretes, az elemi derékszögű hasáb haladás elleni egyensúlyi feltételeiből lehet igen egyszerűen levezetni. Ha a reciprocitási tétel bebizonyításához használt háromszögalapú hasáb z'' egyenesére vonatkozó nyomatéki egyenlet felírásánál az egyes határlapokra eső feszültségek alkotóit Taylor-sorba fejtjük, akkor a nyomatéki egyenletben a negyedrendű végtelen kicsiny tagok összegének eltünése megadja a (4) differencziálegyenletek másodikát. Mivel azonban ez a levezetési mód sokkal több számítással jár, mint a derékszögű hasábon alapuló, azért ennek gyakorlati haszna nincsen; legfeljebb elvileg érdekes, hogy a feszültségi állapotnak összes egyenletei megkaphatók egy bizonyos térfogatelemnek egy bizonyos tengelykörüli forgás elleni egyensúlyából.

Ifj. Szily Kálmán.

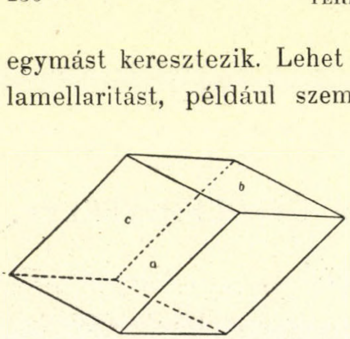
A KETTŐSTÖRÉS UTÁNZÁSA ÜVEGLEMEZEKKEL.

(Első közlemény.)[1]

Körülbelül tíz esztendeje, hogy a kettőstörés jelenségével behatóbban foglalkozva, különös érdeklődésemet keltette fel az a körülmény, hogy a kettőstörés jelensége nem a kristály anyagi minőségéhez, hanem bizonyos kristályrendszerekhez van kötve. Mit fejez ki azonban a kristályrendszer? Ismeretes dolog, hogy a kristály növekedése, épitkezése úgy történik, hogy új anyagrészecskék rakódnak a régiek fölé, új rétegek vonják be a már meglevőket; az új részecskék ezen elhelyezkedése, az új rétegek képződése, bizonyos törvények szerint történik és a kristályrendszerek épen ezen épitkezésbeli törvényeknek kifejezői. Ha tehát a kettőstörés a kristályrendszerekkel van kapcsolatban, akkor kapcsolatban kell annak lenni az anyagrészecskéknek előbb emlitett sorakozódásával, rétegképződésével, és az ez úton előálló belső structurával s kerestem, nem volna-e az anyag lerakódásából előálló ez a belső structura már magában elegendő arra, hogy a kettőstörés jelenségét létrehozza. Vizsgálnom természetesen első sorban a calcit rhomboëdert kellett, a melynél legtökéletesebben észlelhető a kettőstörés, s a melynek tökéletes hasadásossága igen jól feltünteti a belső anyagelrendezést és az ez úton előálló lamellaritást, s feltettem magamban, hogy utánozni fogom a calcit lamellaritását. Ez természetesen a maga teljességében keresztülvihetetlen feladat, mert a calcitnál három irányban, t. i. az *a, b, c* lapokkal párhuzamosan (lásd az 1. rajzot) fordul elő lamellaritas, a mely lamellaritások tehát

[1] Előadatott a Társulat 1908 február 6-iki ülésében.

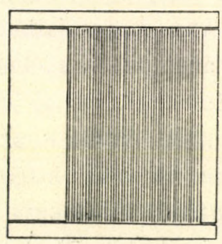
egymást keresztezik. Lehet azonban utánozni az egyik irányú lamellaritást, például szem előtt tarthatjuk azt, a mely az *a* lappal párhuzamos. Ezen eljárással a belső szerkezetnek mintegy egyik componensét teszszük vizsgálat tárgyává s csak arra kell azután vigyáznunk, hogy a majd előálló optikai jelenség is a kettőstörésnek csak componens karakterű jelensége lehet s az is csak bizonyos közelítésben.



1. rajz.

Az említett egyirányú lamellaritást olyképen utánoztam, hogy vékony üveglemezkéket, a milyeneket a mikroskopiánál használunk, az ú. n. tedőlemezkéket állítottam össze egy sorozatba s bizonyos foku dülést adtam a lemezkéknek az által, hogy egy üvegprisma megfelelő szög alatt hajló lapjának döntöttem azokat s a másik végen is ugyanilyen prismát alkalmaztam, azután még oldalt is tettem egy-egy kis léczet, a melynek belső oldalát csekély kanadabalzsam réteggel vontam be, hogy így a lemezkéket és a két prismát összetartsam. Az üveglemezkék hossza 20—24 mm, szélessége 6—10 mm volt. Az üveglemezkék vastagságát és a dülés szögét különbözőkép választottam meg; a leírás alapjául azt veszem, a melynél a lemezkék 0·18—0·2 mm vastagok s a dülés szöge 57°. A kis szerkezetet oldalról és felülről nézve a 2. rajz mutatja.

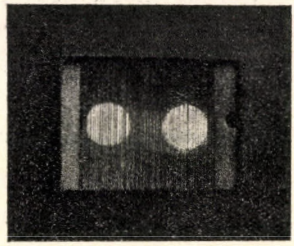
Oldalról nézve.



Felülről nézve.

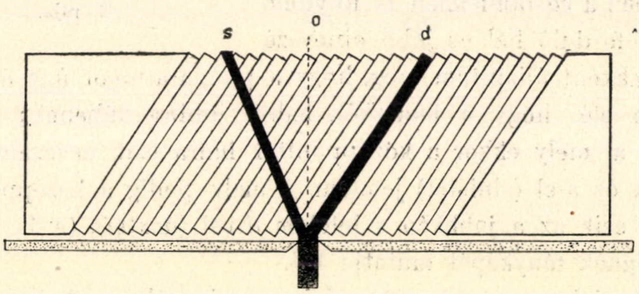
2. rajz.

Ha egy nyiláson fényt bocsátunk át a kis præparatummá foglalt lemezsorozaton, két képet kapunk, t. i. a fényt átbocsátó nyilás kettős képét és pedig meglehetős tökéletességgel. Az egyik kép a középponttól balra esik, a másik jobbra. Középpontnak a fényt átbocsátó nyilás helyét veszem s a későbbiekben is a távolságokat ettől számitom. A két képen kivül van még a fénynek egy harmadik neme is jelen, de az már nem olyan feltünő, t. i. a balképtől kezdve jobb felé egy fénycsóva huzódik és messze elterjed, úgy hogy a jobbképen túl is meglehetős messze elterjeszkedik. Az itt használt, nemkülönben a későbbiekben is folytonosan előforduló bal és jobb elnevezéseket akként állapitom meg, hogy a præparatumot úgy állitom magam elé, hogy a lemezkék balról jobbra düljenek; azt a képet, a mely ekkor a középponttól balra esik nevezem balképnek és *s*-el (sinister) jelelem, a mely pedig a középponttól jobbra esik az a jobbkép s jelelem *d*-vel (dexter). (A 3. kép a jelenségnek fényképét mutatja be).


3. rajz.

A fényjelenséget közelebbről is megvizsgáltam. A két képet összehasonlitva azt találtam, hogy a balkép közelebb esik a középponthoz, mint a jobbkép, fénye bizonyos bágyadtságot mutat és az üveglemezkék közötti közökből jön elő; ezzel szemben a jobbkép fénye élesebb s jellemző, hogy a lemezkék éléből, a lemezkék üveganyagából jön elő. A fénycsóva fénye a balkép fényénél jóval gyengébb és szintén a lemezkék közti közökből jön elő. Nikollal vizsgálva az egyes fénynemeket azt találjuk, hogy a balkép fénye poláros és pedig — a Fresnel-féle kifejezést használva — rezgése a lemezkékre merőleges; különösen jól sötétedik el a képnek bal fele, míg a jobb fele már nem oly tökéletesen és pedig a csóvafény miatt. A csóva fénye t. i. egész hosszában szintén poláros fény, azonban rezgése a lemezkékkel párhuzamos irányú, vagyis a balkép fényének rezgésére merőleges. A csóvafény polárosságának tökéletessége különben a præparatumok szerint ingadozik, mert könynyen keveredik közbe más irányú rezgést mutató fény is. A jobbkép fénye nem poláros, kivéve azt az aránylag igen csekély fényt, a mely a jobbkép helyén a közökből jön elő és a fénycsóvához tartozik.

Kérdés most, hogy a lemez-sorozat miképen hozza létre a leirt fényjelenséget. Erre két kisérleti eljárás nyujt jó felvilágositást. Az egyik eljárásom az volt, hogy a lemezkék alsó élét befeketitettem s az ily lemezkékből készitettem meg a præparatumot. Ez esetben a jobbkép eltünt, ellenben a balkép és a csóvafény még tökéletesebben mutatkoznak, mert a jobbkép dispersiója nem hat zavarólag. A másik eljárásnál a



4. rajz.

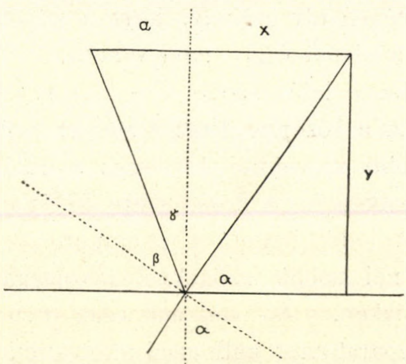
lemezkék élét meghagytam, hanem befeketitettem a lemezkék egyik oldallapjának alsó szegélyét. Ezen præparatumnál a jobbkép megmaradt, de eltünt a balkép és eltünt csaknem teljesen a csóvafény is. Ezek alapján a fényjelenség a következőképen magyarázható, a mint azt a 4. rajz is feltünteti. A jobbkép azon fényből keletkezik, a mely alul a fénytátbocsátó nyilásnál a lemezkék üveganyagába hatol s abban végig haladva a lemezkék felső éléből előjön s alkotja *d*-nél a jobbképet, a melynek fénye nem poláros. A balkép és a csóvafény ellenben azon fényből keletkezik, a mely a lemezkék közti közökön hatol be. Ez a fény a lemezkéknek jobbra dülő oldalfalába ütközik s annak főmennyisége a fénytörés ismeretes szabályai szerint keresztül megy a lemezkéken s balfelé tart; e fénynek egy kis része azonban már a lemezkék legalsó részén visszaverődik, s ugyanez ismétlődik a balfelé haladó fénynek útjában minden egyes lemezkénél, a mi által egész fénypamat terelődik jobbfelé s könnyen szelve a lemezkéket messze elhatol. E fénypamat azután részben talán közvetlenül is feljut a felületre, de főképen az egyes lemezkék által többszörösen is felfelé reflectáltatva hatol fel és alkotja a csóvafényt. Minthogy a visszavert fény az 57° körüli dülés esetében főképen párhuzamos rezgésű sugarakat tartalmaz, azért a csóvafény is többé-kevésbbé tökéletes poláros fény párhuzamos rezgéssel. A fénynek az a része, a mely állandóan balfelé tartva hatol át a lemezkéken, s a melyet az egyes lemezke-felületek mind jobban megfosztanak a párhuzamos rezgéstől, a felületre jutva alkotja s-nél a balképet, a melynek fénye szintén poláros, de a lemezkékre merőleges rezgéssel.

Ezekkel volt szándékom a fényjelenséget, a mint az főtulajdonságaival elénk tünik, megmagyarázni s most megismétlem azt, a mit tárgyalásom elején mondottam, hogy a fényjelenséghez úgy jutottam, hogy a kettőstörő anyag (első sorban a mészpát) belső szerkezetének egyik componensét akartam előállitani s vele a kettőstörés componentialis jelenségét létesiteni. Kérdés most, hogy a tárgyalt jelenség, a mely oly közönséges eredménye az egyszerű üveglemez-sorozatnak, tényleg tekinthető-e a kettőstörés ily componentialis jelenségének s hozható e a kettőstöréssel lényeges kapcsolatba. Ezt szándékom a következőkben bizonyítani. Mielőtt azonban ezen feladathoz fognék, szükséges, hogy a kis præparatumnak néhány sajátságával foglalkozzam, a melyek a bizonyításnál czélszerűen felhasználhatók.

Fontos először is ismerni, hogy a két képnek és a fénycsóvának polarozásbeli és helyzeti viszonyai miképen változnak, ha a lemezkék dülésének szögét változtatjuk. Ennek megvizsgálására egy kis rézkeretet alkalmaztam, a melynek részei mozgékony kapcsolatban vannak egymással és így két párhuzamos oldallapjának nemkülönben a közbetett lemezkéknek a 90° és a körülbelül 20° között tetszésszerinti dülést lehet adni. Kiindulásul e vizsgálatnál az 57° szolgált, s ettől mentem fölfelé a 90°-ig, lefelé pedig körülbelül 20°-ig.

Ha 10 mm széles lemezkéket használtam, a *polározásbeli* viszonyok a következők voltak. A balkép, a melyről említettem, hogy 57°-nál a nikol alatt csaknem teljesen elsötétedik s csak a jobbfele mutat némi világosságot, a magasabb fokoknál tényleg egészen sötét lesz; e kép polarozásbeli viszonyait különben messze nem. követhetjük, mert 64° körül fénye erősen gyengül s 68° körül merőleges nézés esetében a kép egészen elvész. E közben a csóvafény mindig több merőleges rezgésű sugarat vesz fel, a melyek különösen a csóva két végén válnak uralkodókká, úgy hogy midőn a balkép elvész, a csóvának a balképpel határos része a nikol alatt már elég jól elsötétedik s az elsötétedés azután a csóva jobb végén is mindinkább fellép. A csóva maga különben a szög növekedtével mindinkább kisebb terjedelmüvé lesz, úgy hogy 80°-nál már csak a jobbkép környezetére terjeszkedik, s jobbra is balra is körülbelül 3—4 mm-nyi hosszú. E kis csóva a két végén polárosságot mutat merőleges rezgésű jelleggel, de a jobbkép közvetlen környéke a nikol forgatása közben állandóan világos marad. A jobbkép a dülés szögének növekedtével fényben erősödik s marad végig nem poláros.

Ha a dülés szögét az 57°-tól kezdve folytonosan kisebbítjük, a balkép fényerőssége növekszik, de egyúttal polárossága csökken, úgy hogy 48°-nál a képnek csak a bal széle sötétedik el, különben pedig csak elhomályosodik, és 30°-nál már ez az elhomályosodás is meglehetős gyenge. A fénycsóvának a balképpel szomszédos része szintén mindjobban elveszti polárosságát, ellenben a jobbkép felé eső része poláros marad párhuzamos rezgésű sugarakkal. Egyébiránt minél nagyobb dülést adunk a lemezkéknek, a fénycsóva annál rövidebb lesz, úgy hogy 30°-nál, ha merőlegesen nézzük, már nem jut el a jobbképig s ekkor már csak a legvége poláros. Helyette már 45°-nál egy új csóva kezd fellépni, a mely a jobbképből indul ki s tart jobb felé, a melynél a lemezke-élek is világosak meg a közök is. E csóva úgy keletkezik, hogy az erősebben dülő lemezkékbe alul oldalfény hatol be, a mely a lemezkékben végig haladva fönt megvilágítja a lemezkék éleit; ez a fény, nemkülönben a jobbkép fénye a dülő lemezkék hátlapjain visszatükröződik, s létrehozza a lemezkeközök fényét, a mely a 48°-nál, sőt 38°-nál is mutat még némi polárosságot párhuzamos rezgéssel. A jobbkép fénye 30°-ig nem poláros s a dülés szögének kisebbedtével fényerőssége gyengül. A 30°-on alul, körülbelül midőn a balkép többé semmiféle elhomályosodást már nem mutat, a jobbképet adó lemezkék fényes élei



5. rajz.

polárosságot kezdenek felvenni merőleges rezgéssel, a mely polárosság azonban a 20°-nál is csak kevéssé észrevehető.

A mi a képek *helyzeti* viszonyait illeti, legegyszerűbb a jobbkép elhelyezkedése. E kép, minthogy a lemezek üveganyagában haladó fényből keletkezik, általában annyira esik jobbra a középponttól, a mennyire azt a lemezkék dülése megszabja. (Lásd az 5. rajzot.) Ha a dülés szöge a és a lemezkék szélessége c, akkor e távolság

$$x = c \cos a.$$

A balképnek távolságát a középponttól (a) a következő egyenlet adja meg:

$$a = c \sin \alpha \operatorname{tg} \left(\alpha - \arcsin \frac{1}{n} \sin \alpha \right),$$

a hol n a törésmutató.

Ha $c = 1$ cm, $\alpha = 57°$ és n-et $^3/_2$-nek veszszük, akkor

$$a = 0{\cdot}353 \text{ cm}.$$

Ez az eredmény a homogén anyag esetére áll fenn, jelen esetben azonban az anyag homogeneitását a lemezkeközök zavarják meg, a melyekben a fény merőleges irányt vesz és így a balkép a középponthoz közelebb terelődik. A lemezkeközöknek ez a behatása azonban, legalább a lemezkéknek jelzett üvegvastagsága esetében oly csekély, hogy a közönségesebb megfigyelésnél és mérésnél észre nem vehető.

A jobbkép, ha a dülés szöge 57°-nál nagyobbá lesz, mindinkább közeledik a középponthoz, a melyet a 90°-nál el is ér; az 57°-nál kisebb szögeknél távolsága a düléssel folyton nagyobbodik. A balkép, ha a dülés szöge 57°-nál nagyobbá lesz, mindinkább távolodik balfelé a középponttól, míg végre eltünik; az 57°-nál kisebb szögeknél távolsága a középponttól mindinkább csökken, s 40°-nál már csak 0·16 cm.

Még két præparatumot kell megismertetnem. Az egyikét oly lemezkékből állítottam össze, a melyeknek egyik oldallapja egészen be volt feketítve, de a két él tiszta volt. A balkép nem jöhetett létre, a csóvafény sem, de létrejött a jobbkép, a mely a 90°-nál, sőt a 80°-nál is még jól látszik, de már a 70°-nál, ha merőlegesen nézünk, eltünőben van s körülbelül 63°-nál teljesen el is tünik. E jelenség arra mutat, hogy a jobbképet a 80°-on alul már mindinkább oly fény hozza létre, a mely nem direkt jön elő az élekből, hanem a mely az alsóbb részeken reflexiót szenved s úgy halad fölfelé.

A másik præparatumot úgy készítettem, hogy a lemezeket kanadabalzsammal ragasztottam össze. Ez esetben, ha az alsó és a felső felület lemezke-élei és a közök szabadon maradnak, előáll ugyan a két kép, de csak sajátságos torz alakban; ellenben ha a lemezke-sorozat alsó és a felső felületét is bevonjuk kanadabalzsammal és hogy a kanadabalzsam réteg egyenletes legyen, fedőlemezkéket alkalmazunk rája, akkor igen szép áttünő præparatumot kapunk, a mely azonban már csak egy képet ad, a mely merőleges irányban hatol fel. E præparatum elég jól szemlélteti, mért nincs az amorph anyagoknál kettőstörés.

Végül még azt akarom megjegyezni, hogy a fentebb említett egyik præparatum, a melynél t. i. a lemezke-éleket, hogy a jobbképet eltüntessem, befeketítettem, tűrhető jó polarizator, különösen ha vagy a csóva fényét tüntetjük el s csak a balkép marad, vagy megfordítva. Erről a későbbiekben részletesebben szándékozom szólni.

Terlanday Emil.

(Folytatása következik.)

PHYSIKAI LABORATORIUM.

Egyetemes készülék a gázok és gőzök tulajdonságainak demonstrálására.

Az egyetemes készülékeknek a fizika tanításában nem megvetendő előnyük van. Ilyen készüléknél csak egyszer kell az eszköz szerkezetével bibelődni; minden következő alkalommal már mint jó ismerős áll a tanulók előtt. A demonstráló eszközök esetlegességei úgyis túlontúl igénybe veszik és a főkérdéstől elterelik a tanulók figyelmét. A tanárra nézve is kényelmes, ha van eszköze, melyet sokszorosan használhat.

A gázok és gőzök tulajdonságainak demonstrálására szolgáló egyetemes készülék sok feltételnek tartozik eleget tenni. Kell, hogy vele a légüres tér előállítható legyen. Szükséges továbbá, hogy a nyomások, térfogatok és hőmérsékletek meglehetős tág határok között változtathatók és leolvashatók legyenek.

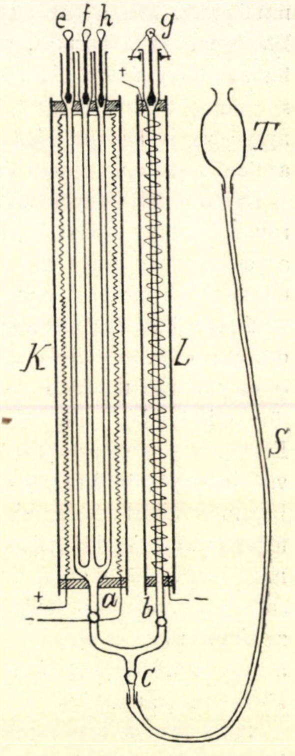
Az ilyen irányú és czélú készülékek közül megemlítjük a SCHAFFERS-félét,[1] a melylyel úgy a Boyle-Mariotte féle törvény, valamint a telített gőzök feszültsége demonstrálható. Intézetünk szertára részére attól függetlenül, hasonló szerkezetű eszközt terveztem és készíttettem. Ez az eszköz azonban több czélra alkalmas mint a SCHAFFERS-féle. Nevezetesen fűtőszerkezete folytán az előbb említetteken kívül alkalmas a következő demonstrácziókra: gázok kiterjedése állandó nyomásnál, gázok feszültségének változása állandó térfogatnál, gőzök feszültségének változása a hőmérséklettel, telített és nem telített gőzök. Ezenkívül el vannak benne kerülve azok a hibák, a melyek a SCHAFFERS-félében előfordulnak.

Az eszközben van négy barometrikus cső, a melyek közül három egy közös csőben egyesül, a negyedik pedig külön áll. Az összefoglaló cső az *a* csap után, a negyedik cső a *b* csap után szintén egyesül egy közös csőben, melyet a *c* csap zárhat el. Ebből az *S* gummicső vezet a *T* higanytartóba. A csövek fönt kissé szélesebb tölcsérekben végződnek, s a jól beköszörült *e, f, h, g* szelepekkel zárhatók el.

[1] Zeitschrift f. d. phys. u. Chem. Unterricht 1905, 217. oldal.

A három üvegcsövet körülveszi a széles *K*, a negyediket az *L* üvegcső. Ezek mint köpönyegek működnek s a barometrikus csövek fűtését teszik lehetővé; a zárást a széles parafadugók végzik, melyeken a barometrikus csövek átfutnak.

A fűtés egészen speciális módon elektromos árammal eszközölhető. Ilyen eszköz czélszerűen nem is fűthető másképen. A vízgőzfűtésnek az a hátránya, hogy a lecsapódott harmat és köd a leolvasást, illetőleg a higanyszálak helyzeteinek megfigyelését lehetetlenné teszi. A melegvíz fűtés ilyen méretek mellett teljesen lehetetlen. A meleglevegő fűtés nagyon lassú és nem egyenletes. Az elektromos árammal való fűtés gyorsan eszközölhető és aránylag elég egyenletes. Természetes, hogy ily alakjában az eszköz csak ott használható, a hol van erős áram. Nemcsak ez az eszköz, hanem más hőtani eszközök is a legczélszerűbben elektromos árammal fűthetők. E czélra természetesen az eddigi eszköztypusokat át kellene alakítani. Készülékünkben a barometrikus csövek mögött és mellett (1 mm átmérőjű) nikelindrót-spirálisok futnak végig, a melyek az áramtól kapott meleget a levegőnek és a csöveknek átadják. A negyedik csövet a nikelinspirális teljesen körülveszi. Ez azért van, hogy itt nagyobb hőmérséklet is kifejthető legyen. Ha például a higanygőzök feszültségét vizsgáljuk, akkor 360° C-ig kell fűteni. E különálló csőben a hőmérséklet el is érhető.



Az eszköz speczialitását képezik az *e*, *f*, *g*, *h* szelepek is. A közönséges keresztbemenő üvegcsapok nem zárnak eléggé légmentesen, különösen pedig nem akkor, ha az üvegcsövet felmelegítjük. Azonkívül a keresztcsapok melegítésnél könnyen repednek. Ha e szelepeket leszorítjuk és föléjük higanyt öntünk, akkor légzárásuk tökéletes. A *g* szelep még rugós szorítóval is el van látva arra az esetre, ha egy atmoszféránál nagyobb nyomással dolgozunk.

Az egész készülék állványra van szerelve, és a csövektől jobbra balra czentiméterosztályzat van. Az állványon a *T* higanytartóedény föl- és letolható és minden helyzetben megerősíthető. A hőmérséklet a barometrikus csövek mellé függesztett hőmérőn olvasható le. Az eszköz úgy is készíthető, hogy a *K* és *L* üvegcsöveket pléhszekrény helyettesíti, a melyet elől hőálló üveglap zár el.

Torricelli kisérlete. A légkör nyomását az ismeretes módon mutatjuk be. A higanytartót alsó állásába helyezzük és megtöltjük higanynyal, azután lassan és óvatosan felemeljük, míg a higany a szelepek fölé nem ér. Ezután a szelepeket beszorítjuk és a *T* higanytartót lesülyesztjük mindaddig, míg a barometrikus csövekben a Torricelli-ür létre nem jő. Dolgozhatunk a hármas, az egyes vagy mind a négy csővel. Megmutathatjuk, hogy újabb higany hozzáeresztése a higanyoszlopot se nem emeli, se nem sülyeszti. E czélból a szelep feletti tölcsért megtöltjük higanynyal (úgy is kell ott higanynak lennie, hogy a légzárás tökéletes legyen); azután a szelepet lassan és vigyázva nyitjuk. Arra kell vigyáznunk, hogy a szelep csak nagyon kis mértékben emelkedjék, mert különben a lerohanó higany magát a szelepet is kilökheti. A higany beeresztése után az oszlop magassága nem változik. Ellenben egy kevés levegőnek beeresztése az oszlopot már lenyomja.

2. *A gázok térfogata és nyomása között lévő összefüggés.* A negyedik barometrikus csőben bizonyos légoszlopot határolunk. E czélból az *a* csapot zárjuk és a *b*-t és *g*-t nyitjuk, azután a higanytartót emeljük mindaddig, míg a kívánt hosszúságú légoszlop el nincs érve. Ezután a *g* szelepet beszorítjuk, a rugót is reávetjük és a tölcsérbe kevés higanyt öntünk, hogy a légzárás tökéletes legyen. Leolvassuk a barométerállást és a higanytartó állását. Ha ezután ezt a higanytartót feljebb vagy lejebb toljuk, akkor a csőben elzárt légoszlopra ható nyomást nagyobbítjuk vagy kisebbítjük. Leolvassuk a térfogatokat és nyomásokat; az adatokat táblázatokba állítjuk. Az összetartó értékpárok szorzatai ugyanazt a számot adják. Ily módon a Boyle-Mariotte-féle törvény az egy atmoszféránál nagyobb és kisebb nyomásokra egyszerre, egy eszközzel megmutatható.

3. *A levegő hőkiterjedése állandó nyomásnál.* Ismét a negyedik barometrikus csővel dolgozunk. A higanytartó állításával elhatárolunk bizonyos légoszlopot. A *g* szelepet csukjuk, a légoszlop hosszát s a csőben uralkodó hőmérsékletet leolvassuk. Az utóbbi leolvasás czéljára már előzőleg egy hőmérőt kell a cső mellé függeszteni. Ezután a fűtőszerkezet két polusát megfelelő rheostattal együtt az áramvezetékbe csatoljuk. A mint a hőmérséklet emelkedik az elzárt légtömeg kiterjed, a *T* higanytartót sülyesztjük mindaddig, míg benne a higany épen olyan magasan áll, mint a barometrikus csőben. Ily módon elérhetjük azt, hogy a nyomás folyton állandó maradjon. Leolvassuk a hőmérsékletet. Az eljárást megismételhetjük akárhányszor. A fűtőszerkezettel felmehe-

tünk 300 fokig is. Az összetartozó értékpárokat ismét táblázatba állítjuk. Ebből konstatálhatjuk a GAY LUSSAC-féle első törvény érvényességét.

4. *A levegő feszültségének változása állandó térfogatnál.* Az eljárás teljesen ugyanaz, mint a megelőző pontban. A különbség csak abban nyilvánul, hogy most a térfogatot kell állandónak tartani. A fűtőszerkezet becsatolása után a légtömeg kitágul, a higanyt kinyomja; megváltozik térfogata is, feszültsége is. Azonban a *T* higanytartó emelésével a légtömeget mindig visszaszoríthatjuk eredeti térfogatára. A higanytartóban lévő higany felszíne és a csőben lévő higany felszíne közötti nivókülönbség adja a feszültségnagyobbodást. Ismét egy táblázatot készíthetünk a hőmérséklet és a feszültség összetartozó értékpárjaiból és konstatálhatjuk a GAY LUSSAC-féle második törvényt.

5. *A levegő hőkiterjedése általában.* E czélra ismét határolni kell bizonyos légoszlopot s azután a fűtőszerkezet becsatolása után, három összetartozó értéket kell leolvasni; ezek: a hőmérséklet, a térfogat és a nyomás. A nyomásnövekedést ismét a higanyfelszínek között lévő nivókülönbség adja. Az adatok táblázatba való állítása után konstatálhatjuk az egyesített BOYLE-MARIOTTE—GAY LUSSAC-féle törvényt.

6. *Kísérletezés különböző gázokkal.* Ha az a kívánság merül fel, hogy a különböző gázok viselkedését egyszerre lehessen bemutatni, akkor a készüléket kissé másképp kell szerkeszteni. A barometrikus csöveket hosszabbaknak kell választani (80 cm helyett 100 cm) úgy hogy elágazási helyük a *K*-csövön kívül legyen. Az *a* csap helyett mindegyik csőbe külön csap készítendő és pedig kettős furattal, úgy hogy a csapon keresztül a csőbe tetszésszerinti gáz legyen bevezethető. Ily módon a hármas cső mindegyike más és más gázzal tölthető meg. Az egyik pl. széndioxiddal, a másik hydrogénnel és a harmadik levegővel. Ez esetben a 2., 3., 4., 5. kísérlet egyszerre három különböző gázon mutatható meg

7. *A telített gőzök feszültsége.* A baloldali hármas csőrendszerrel dolgozunk, a különálló cső mint barométer szerepelhet. A *T* higanytartót oly magasra emeljük, hogy a higany a csövekben a szelepek fölé kerüljön, azután leszorítjuk a szelepeket és a higanytartót legmélyebb helyzetéig sülyesztjük le. Szóval létrehozzuk a TORRICELLI-féle űrt miként az első esetben. A csövek felső tölcsérébe sorban: vizet, alkoholt és étert öntünk (esetleg más folyadékot, melynek gőzeit vizsgálni akarjuk). A szelepeket vigyázva kinyitjuk s a folyadékot a Torricelli-űrbe engedjük. A fejlődött gőzök a higanyoszlopot lenyomják, legjobban az éter, azután az alkohol, legkevésbbé a víz. A gőzök feszültségét megadja a higanynivónak a sülyedése.

8. *A telített gőzök feszültségének függése a hőmérséklettől.* Az eljárás teljesen azonos a megelőzővel. Leolvassuk a hőmérőt és leolvassuk

az egyes gőzök feszültségét. Azután becsatoljuk a fűtőszerkezetet és a hőmérséklet és feszültségek összetartozó értékeit folyton jegyezzük. 35° körül az étergőzök feszültsége eléri az egy atmoszférát, az éter forrni kezd. Ezt a csövet immár ki kell csatolni; e czélra semmi egyebet nem kell tenni, mint a felső szelepet kinyitni. 78 foknál ugyanez történik az alkohollal. Ezzel a készülékkel tehát azt is demonstráljuk, hogy a forráspontnál a folyadék telített gőzeinek feszültsége eléri a külső nyomást.

9. *A higanygőzök feszültsége.* A negyedik számú csövet használjuk e czélra. Létrehozzuk a Torricelli-űrt, a melyben tulajdonképen higanygőzök vannak. Azután becsatoljuk a fűtőszerkezetet. Látni fogjuk, hogy a feszültség csak a magas hőmérsékleteknél kezd növekedni. A fűtést nem szabad siettetni.

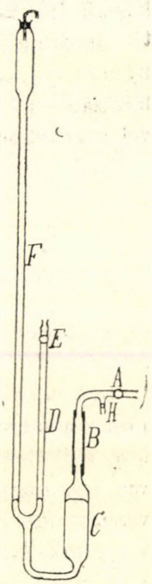
10. *Telített és nem telített gőzök.* A hármas csőrendszerben megcsináljuk a Torricelli-féle űrt. Azután a tölcsérekbe valamely folyadékot (pl. vizet) öntünk. A szelep megemelésével azután a csövekbe különböző mennyiséget engedünk be: az elsőbe nagyon keveset, a másodikba valamivel többet, és a harmadikba még többet. A T higanytartót most igen mélyre visszük alá.

A Torricelli-űrök nagysága növekszik, a folyadék párolog és elegendő mély állásnál az elsőben, esetleg a másodikban is teljesen elpárolog. Ilyen módon az első csőben (esetleg a másodikban is) nem telített gőz, a harmadikban pedig telített gőz lesz. Ugyanezt úgy is elérhetjük, ha a készüléket fűtjük akkor, a mikor a csőben kevés folyadék van. A higanytartó állításával meggyőződhetünk arról, hogy a telített gőzök feszültsége független a térfogattól, ellenben a nem telítetteknél érvényes a Boyle-Mariotte-féle törvény. *Mikola Sándor.*

Készülék a vízvezetéki nyomás mérésére és a Boyle-Mariotte-féle törvény bemutatására.

A tanításban minden alkalmat meg kell ragadni az elvont mennyiségeknek méréssel való demonstrálására. Így például nagyon sokat beszélünk a nyomásról, de nem gondoskodunk arról, hogy a vízvezetékekben és gázvezetékekben uralkodó nyomás mérése mindig a tanulók szemei előtt lebegjen. Sokszorosan beszélünk arról az analógiáról, a mely az elektromos áramlás és a vízvezeték vagy gázvezeték csöveiben történő áramlás között fennáll. A városi czentralékból jövő elektromos vezetéket el is látjuk feszültség- és árammérő műszerekkel, azonban az ugyancsak czentralékból szétágazó víz- és gázvezetékeket nem látjuk el hasonló czélú eszközökkel. A használatos gáz- és vízórák teljesen ugyanazt a szerepet töltik be mint az ampèremérők, azonban a fizikai oktatásban nem igen szerepelnek. Czélszerű volna üvegalkatrészek becsatolásával úgy átalakítani őket, hogy működésük módja látható legyen. A gázvezetékben uralkodó nyomás egyszerű nyitott vízmanométerrel mindig mérhető. Érdekes ezen is megfigyelni miként csökken a nyomás, ha a környezetben a fogyasztás nagy.

A vízvezetéki nyomás mérése és a Boyle-Mariotte-féle törvény bemutatása czéljából iskolánk fizikai előadó terme részére a következőkben leirandó eszközt konstruáltam. A készüléknek elve az, hogy a vízvezetéki nyomás egy megfelelő magas higanyoszloppal ellensúlyoztassék s úgy van tervezve, hogy állandóan fel legyen szerelve a falra és be legyen csatolva a vízvezetékbe. Szerkezetét a mellékelt ábra mutatja. *A* a vízvezetéki csap, a mely a *B* vastagfalú gummicső segítségével van a készülékkel összekapcsolva; *C* a higanytartó, *F* az egyensúlyozó higanyoszlopot felfogó cső és *D* pedig a légcső, a melyet *E* csap légmentesen bezár. Ha az *A* csapot megnyitjuk, akkor a vízvezetékben uralkodó nyomás a *C* tartóban lévő higanyt az *F* és *D* csövekbe szorítja mindaddig, a míg a higanyoszlop oly magas nem lesz, hogy a vízvezetéki nyomással egyensúlyt tud tartani. Ugyanakkor a *D* csőben lévő levegő az uralkodó nyomásnak megfelelően kisebb térre szorul össze. Ha az *A* csapot bezárjuk és a *H* csapot kinyitjuk, akkor az *F* és a *D* csövekben lévő higany visszatér a *C* tartóba, a víz pedig a *H* csapon kifolyik.



A készülék elkészítésénél a következőkre kell ügyelni. Az *F* és *D* csövek az úgynevezett barometrikus üvegcsövekből készítendők, melyeknek belső átmérőjük 3—5 mm, falvastagságuk 1—2 mm. Az *F* cső oly hosszú a mekkorát az uralkodó vízvezetéki nyomás megkíván, általánosságban tehát: $1\frac{1}{2}$—$2\frac{1}{2}$ méter. A *D* cső hossza tetszésszerinti, czélszerű 50 cm. A *C* higanytartó köbtartalma úgy választandó, hogy a benne lévő higany bőségesen elegendő legyen az *F* és *D* csövek megtöltésére. Az *F* cső fönt nyitott; hogy a por be ne szálljon, be kell dugaszolni s a külső levegővel való összeköttetést meggörbített vékony üvegcsőre kell bízni. Az *E* csapnak igen jól kell a levegőt zárnia. A *B* gummicsőnek körülfontnak vagy vászonbetétesnek kell lennie, hogy az uralkodó nagy nyomás szét ne pukkassza. A két vége dróttal erősen lekötendő. Az *F* cső mellé czentiméterosztályzat a *D* cső mellé még azonkívül milliméterosztályzat is teendő.

A Boyle-Mariotte-féle törvény bemutatása a következőképen mehet végbe. Mindenekelőtt arról gondoskodunk, hogy az F és a D csövekben egyenlő magasan álljon a higany, a mit az E csapnak kinyitásával mindig el tudunk érni. Azután barométeren leolvassuk az uralkodó légnyomást (pl. 756 mm) és a D mellett lévő osztályzaton az elzárt légtömeg hosszát (pl. 480 mm). Most kinyitjuk az A csapot és engedjük az F csőbe a higanyt bizonyos magassagig (pl. 280 mm-ig) felnyomulni. Becsukjuk az A csapot leolvassuk az összenyomódott légtömeg hosszát (pl. 350 mm). Megint kinyitjuk az A csapot engedjük a higanyt még magasabbra (pl. 530 mm), becsukjuk A csapot, leolvassnk a légoszlop hosszát (pl. 282). És így megy ez tovább, mindaddig, a míg a vízvezeték maximális nyomását el nem érjük. Ily módon a térfogat (v) és a nyomás (p) egész sereg összetartozó értékpárját kaphatjuk meg. Ezeket táblázatba állítjuk össze, a mely tehát a fönti esetek tekintetbe vételével a következő alakú lesz:

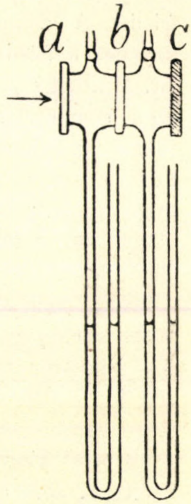
p	v	$v \times p$
756	480	362,880
756 + 280 = 1036	350	362,600
756 + 530 = 1286	282	362,652

és így tovább. A végén konstatáljuk, hogy a térfogat és a nyomás szorzata állandó marad, a mi a fordított arányosság legpreczizebb kifejezése.

Ugyanezt a készüléket még egyéb czélokra is felhasználhatjuk. Különösen alkalmas a hidrodinamikus és a hidrosztatikus nyomások között lévő különbség demonstrálására. Tegyük fel, hogy az A csap nyitva van úgy hogy az F-ben lévő higanyoszlop méri az akkor uralkodó vízvezetéki feszültséget. Ha most valahol közelben egy vízvezetéki csapot kinyitunk, látni fogjuk, hogy a nyomás rögtön leszáll. A higanyoszlop, most a hidrodinamikus feszültséget méri, a mely kisebb mint a hidrosztatikus és pedig annál nagyobb mértékben, minél több víz folyik ki a közelben lévő csapon. Ha ezt most ismét becsukjuk, visszatér a régi magasabb hidrosztatikus feszültség. Ha a csap bezárása hirtelen történik: az áramlásban lévő folyadéktömegek tétlensége megnyilatkozik, a nyomás hirtelen igen magasra ugrik fel, úgy hogy a hidrosztatikus nyomás jóval nagyobb. Így tehát a hidraulikus kos elve is igen tanulságos demonstráczióban részesíthető. *Mikola Sándor.*

Készülék a levegő melegedési módjának megmutatására.

WEINHOLD[1] szerkesztett e czélra egy készüléket, amely azonban túlságosan körülményes volta daczára sem mutatja azt, a mit mutatnia kellene. Úgy alakítottam át, miként azt a mellékelt ábra mutatja. Két üvegalkatrészből áll, a melyek teljesen egyenlők. A szélesebb üveghengeren fent egy csap, lent pedig egy manometrikus cső van. A henger hossza 3—4 cm, belső átmérője 3 cm, falvastagsága 2—3 mm. A manometrikus cső egyik ágának hossza 30—40 cm. A felső csap helyett jól záró gummidugót is lehet használni.



A széles henger két végét síklapon kell megcsiszolni. Azután a két különálló részt halenyvvel összeragasztjuk, de úgy hogy közbe a *b* csiszolt és polirozott kősólapot tesszük. Az egyik végét egy kősólappal (*a*), a másik végét pedig kormozott vagy feketére festett üveglappal (*c*) zárjuk el. A manometrikus csövekbe görbe pipetával színes folyadékot öntünk (e czélra a szokott eosinnál alkalmasabb: kalium bichromát oldat). Az egész készüléket állványra szereljük és skálával látjuk el.

A felső üvegcsap arra való, hogy kinyitásával a két csőben a folyadék egyenlő magasra legyen állítható.

Ha e készüléket a Nap vagy az ívlámpa sugarainak irányába tesszük, azt fogjuk tapasztalni, hogy csak a második manométer állása változik meg, jeléül annak, hogy csak a második hengerben lévő levegő melegszik fel. A Nap sugarai tehát az első légtömegen áthaladnak a nélkül, hogy azt felmelegítenék. Ebből következik, hogy a második hengerben lévő légtömeg sem melegszik direkte a napsugaraktól, hanem a *c* fekete laptól. A nagy légkör a Nap sugarait majdnem teljesen átereszti, csak a földi tárgyak nyelik el őket és melegesznek fel tőlük. Ezektől a tárgyaktól melegszik azután vezetés útján a levegő.

Ha az eszköz elé 300—400 fokú (tehát nem izzó) fekete fémlapot tartunk, azt fogjuk tapasztalni, hogy az első manométer állása nagyobb mértékben változik meg, mint a másodiké. Ez azt mutatja, hogy a «*sötét hősugarakat*» (a nagy hullámhosszúságú vöröseninneni sugarakat) a levegő jó nagy részben elnyeli. Ennek alkalmazása a Föld hőgazdálkodására szembeszökő. Éjjel a Föld kisugározza melegét, azonban eze-

[1] Weinhold: Phys. Demonstrationen IIIA. 514.

ket a «sötét hősugarakat» már nem ereszti át oly könnyen a légkör mint a nappali fényes hősugarakat.

A legnagyobb részüket elnyeli. A légkör tehát úgy működik mint a Föld takarója. Az elnyeletés még nagyobb mértékű, ha a levegő vízgőzzel telített. *Mikola Sándor.*

Az elektrosztatikai tér erővonalainak kísérleti bemutatása.

Az erőterek erővonalainak bemutatása a fizika tanításában fontos feladat. A mágneses tér erővonalait könnyű is demonstrálni. Azonban ugyanez a feladat az elektrosztatikai térben meglehetős nehézségekkel jár. Minthogy pedig az elektromos jelenségekről alkotott fogalmaink épen ezen erőtér élénk képzetén alapulnak, érthető miért foglalkoztak olyan sokan az elektrosztatikai tér erővonalainak kísérleti bemutatásával.[1] Legyen szabad nekem is egy igen egyszerű módszert leírnom, amelyet évek óta használok. Nem ád ugyan pontos erővonalakat, azonban az az előnye van a többi módszerek felett, hogy nem síkbeli, hanem térbeli. Bemutatásához nem szükséges vetítés és mégis messziről is jól látható. Nem kell ehhez a módszerhez semmi más mint papirosbokréta, a többit megmagyarázzák a mellékelt ábrák, a melyek fotografikus úton lettek készítve. Az erővonalakat selyempapirosszalagok mutatják (szélesség 4—5 mm, hosszúság 10—20 cm), a melyek a megfelelő vezető testekre vannak ragasztva.

A teret kisebbfajta megosztó elektromos gép adja.

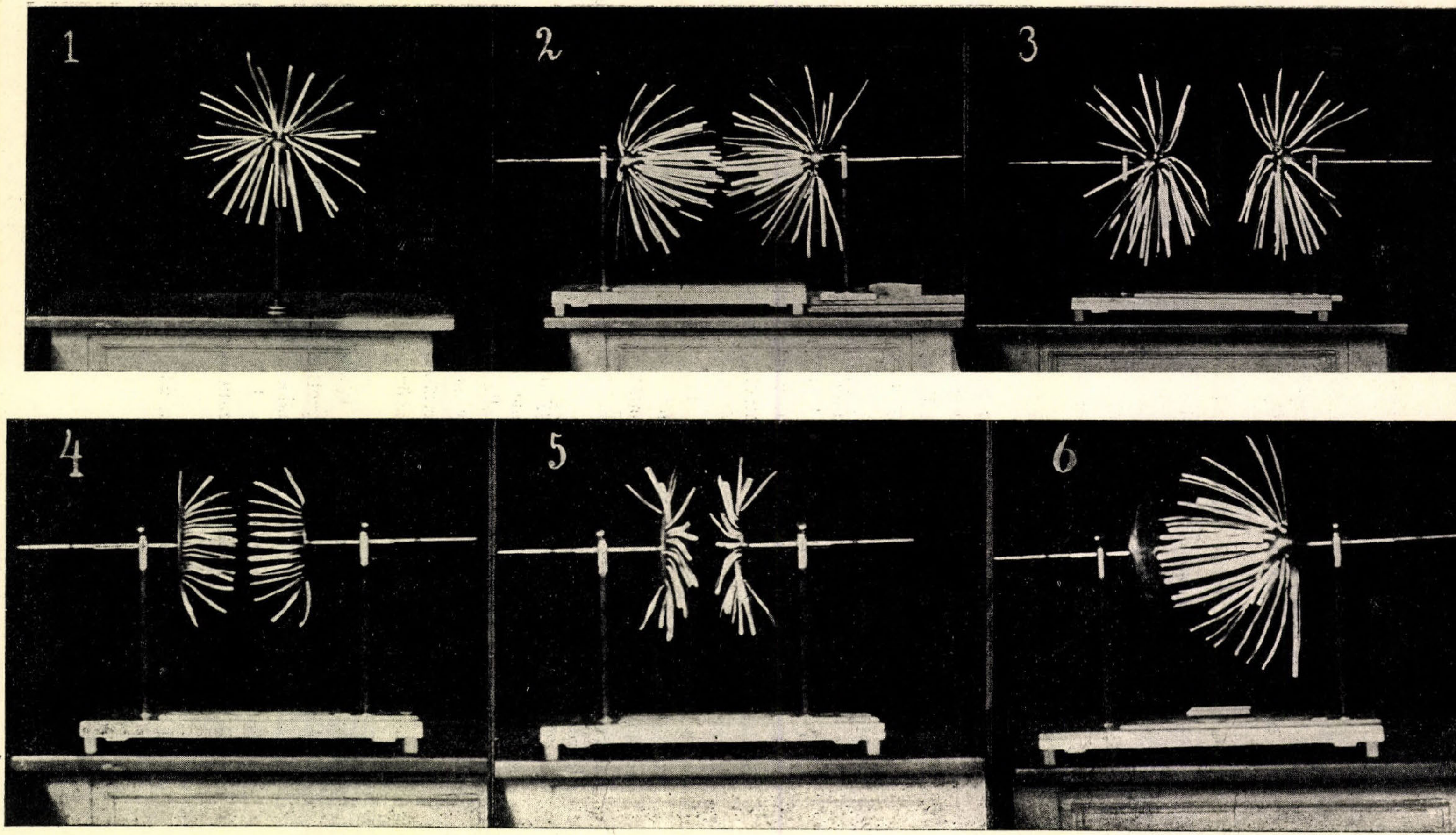
Az 1. ábra egy pont vagy gömb terét mutatja.

A megosztógép egyik sarka a bokrétás golyóval, másik sarka pedig a földdel volt összekapcsolva.

A 2. ábra két ellenkező töltésű golyó terét mutatja. Az elektromos gép mindkét sarka egy-egy bokrétás golyóval van összekapcsolva. A 3. ábrában a két golyó egynemű töltéssel bír, (a gép másik sarka összekapcsolva a földdel). A negyedik és ötödik ábra két kondenzátorlap erőterét mutatja különnemű és egynemű töltések esetében. Érdekes megfigyelni az erővonalak rohanását, ha az ellenkező töltésű kondenzátor-

---

[1] Az újabbak közül csak a következőket említem:
Boudréaux, C. R. CXXVIII., 882, 1899.
Seddig, Ann. d. Physik, 11, 815, 1903.
G. Mie, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterricht, 154, 1906.
W. Holtz, Phys. Zeitschr. VII, 258, 1906.
W. Holtz, Ann. d. Physik 20, 591, 1906.


1
2
3
4
5
6

lapokat jó vezetővel kötöm össze. A hatodik ábra azt mutatja, hogyan sűrűsödnek az erővonalak egy a földdel összeköttetésben lévő vezető felé. A golyó elektromos töltéssel bír, a vele szemben álló kondenzátorlap pedig le van vezetve a földbe.

A fotografiai felvétel úgy történt, hogy a Holtz-féle megosztó gép és a bokrétás vezetők közé fekete posztót feszítettem ki, hogy a háttér zavarólag ne hasson. *Mikola Sándor.*

Húros elektromos mérőeszközök.

(Húros galvanométer, elektrodinamométer, wattmeter, elektrométer.)

Miután Einthoven [1] oly sikeresen alkalmazta a mágneses térben kifeszített vezető húrt kicsiny áramerősségek mérésére, egymásután készülnek a hasonló elveken alapuló különféle elektromos mérőeszközök, melyeknek közös jellemvonása, hogy a mérendő erőt nem egy fonál *elcsavarodásá*val, hanem kifeszített fonál (húr) kihajlásával határozzák meg. A húros galvanometer elve tulajdonképen Adertől származik, ki 1897-ben a Comptes Rendus 124. kötetében (1440. l.) ír le egy eszközt, melynél 1 m hosszú 0·02 mm vastag fémfonál volt kifeszítve hatalmas mágnes sarkai között. A megfigyelés nagyítás nélkül történt és 1 mm-nyi kitérésnek $3 \cdot 10^{-7} A$. felelt meg. Az eszköz persze nehézkes volta miatt nem terjedt el, úgy, hogy a gyakorlatban tényleg bevált húros eszközök közt az Einthoven-féle az első. Sok esetben az ily húros eszközök kényelmesebben használhatók és érzékenyebbek, mint a «torziós» műszerek s azért úgy hisszük, nem lesz érdektelen nehány ily húros eszköz rövid ismertetése.

Th Place készített legelőször egy meglehetősen univerzális eszközt, melyben a mágneses teret két egymással párhuzamosan kifeszített vastagabb drót hozta létre, ha rajtuk ellenkező irányú áram futott végig; e két drót között, tengelyeikkel egy síkban volt kifeszítve a tulajdonképeni húr, vékony ezüstözött kvarczfonál. A vastag drótokat és a húrt különböző módon kapcsolva az eszköz különböző czélokra volt felhasználható.

J. K. A. Wertheim Salomonson készíttetett egy hasonló berendezésű pontos műszert és azt s a vele végzett mérések eredményeit a Physikalische Zeitschrift 1907. évfolyamában (195—198. l.) írja le.

A vastag drótok ezen eszközön 1 mm átmérőjűek és vörösrézből valók, csavarokkal pontosan párhuzamosan állíthatók; ugyancsak csava-

---

[1] L. Math. és Phys. Lapok, 16. k. 255. l. (1907).

rokkal pontosan állítható és feszíthető a húr is. A húr kihajlása okulár mikrométerrel ellátott mikroszkóp segítségével lemérhető. Az eszköz a következő czélokra használható:

1. Mint *galvanométer.* A vastag drótokon erős áramot vezetünk keresztül úgy, hogy a két drótban az áram iránya ellenkező legyen; a mérendő áram a húron fut végig. Ha $20A$ t vezetünk a rézdrótokon át, azoknak mágneses tere a tőlük 0·1 mm-re kifeszített húr helyén 80 Gauss, azaz csak mintegy 250-ed része az Einthoven galvanométer terének; ez utóbbinál ugyanis a mágneses tér erőssége 20.000 Gauss. Az Einthoven-féle legjobb eszköznél az érzékenység $10^{-11} A$ s ennek megfelelően a Place-féle műszer érzékenysége mint galvanométer csak $2{\cdot}5 . 10^{-9}A$. Nagy előnye azonban a Place félének, hogy erős áramok mérésére is használható. Ha ugyanis bizonyos állandó áramot vezetünk végig a húron, a kihajlás a vastag drótokon átfolyó áram erősségével lesz arányos. Ily módon 1—$20A$. erősségű áramok is lemérhetők és ha a vastag drótokat egymással párhuzamosan kapcsoljuk, a mérhető áramok határa $40A$-ig kitolható.

2. Mint *elektrodinamométer.* Váltakozó áramok mérésére Salomonson az eszközt úgy használja, hogy a mérendő áramot egymásután átvezeti a vastag drótokon, azután a vékony húron. Az érzékenység így persze igen csekély, csak mintegy $2{\cdot}10^{-4}A$, a váltakozó áramot azonban az eszköz egyirányú kitéréssel jelzi. Ha erről a követelményről lemondunk, sokkal nagyobb érzékenység érhető el; ha ugyanis a vastag drótokban erős egyirányú áram kering ép úgy mint egyenáram mérésénél, s a mérendő váltakozó áramot csak a húron vezetjük keresztül, a húr rezgő mozgást fog végezni, mely — ép úgy mint az Einthoven-félénél[1] — megfelelő megvilágítás mellett jól megfigyelhető és a melynek amplitudója szolgálhat az áramerősség mérésére. Az érzékenység ez esetben előreláthatólag ugyanaz lesz, mint egyenáramnál ($2{\cdot}5 . 10^{-9}$), a mi már váltakozó áramok esetén igen figyelemreméltó eredmény. Salomonson azt sem említi, hogy ha rezgő kiütéseket is megfigyelünk, erős váltakozó áramok is ép úgy mérhetők, mint erős egyenáramok. Elegendő ugyanis állandó egyenáramot vezetni keresztül a húron és a mérendő erős váltakozó áramot pedig a vastag drótokon. Így 1—$40A$ erősségű váltakozó áramok is lemérhetők.

3. Mint *wattmérő.* Azon áramkörbe, melynek wattfogyasztását mérni akarjuk, beiktatjuk a vastag drótokat, a mágneses tér tehát az áramkör erősségével lesz arányos, a húrt pedig, megfelelő ellenállás elébe kapcsolásával, a vizsgálandó áramkörhöz párhuzamosan kapcsoljuk mint

[1] L. az idézett közleményt.

voltmérőt, ezen tehát az elektromindító erővel arányos erősségű áram fog átfolyni. A húr kihajlása tehát épen az áramkör munkasikerével lesz arányos. Ily kapcsolásnál az érzékenység is igen jelentékeny (egy osztályrész 10^{-5} watt), de különös előnye, hogy az eszköz teljesen önindukcziómentes, a megvizsgálandó áramkör fáziseltolódását tehát egyáltalában nem változtatja meg mint az eddig ismeretes wattmérők.

4. A műszer még mint elektrométer is használható. A vastag drótok egy-egy kvadránspárnak felelnek meg, a vékony drót a piskótának. Salomonson műszerész idiosztatikus kapcsolásnál (a húr és az egyik vastag drótot töltjük a megvizsgálandó feszültségre, a másikat levezetjük) a legérzékenyebb beállításnál 3μ vastag platinahúr 0·25 V. mellett adott 1 osztályrész kitérést.

Sokkal nagyobb érzékenység volt elérhető, ha +50 ill. —50 voltra töltötte a két vastag drótot és a mérendő potencziálra emeljük a húrt: ez esetben ugyanaz a platinahúr 1 millivolt mellett mutatott egy osztályrész kitérést. A kvadrans elektrométerek érzékenysége sem fokozható ennél sokkal nagyobbra.

A Place-féle húros mérőeszköz tehát mint látjuk különösen sokoldalúságával vonja magára a figyelmet, de e sokoldalúsága mellett minden egyes esetben is igen figyelemreméltó eredményeket tud felmutatni.

*

A *Physikalische Zeitschrift* ez évi 8. számában (246. lap) még egy húros eszköz leírását találjuk Th. Wulf-tól. E műszer tulajdonképen *húros elektrométer*, melynek czélja volna különösen az aluminiumleveles elektrométereket megbizhatóbb eszközzel helyettesíteni.

Borostyánkőbe foglalt fémrúd két közvetlenül egymás mellett felfüggesztett igen vékony, platinázott kvarczfonállal érintkezik; a két kvarczfonál egyenlő hosszú (6—7 cm), alsó végeiken egymáshoz vannak erősítve és egy kis közös súlylyal megterhelve. Ha a fémrudat elektromossággal megtöltjük, a két fonál a rajtuk lévő töltések taszítása folytán kihajlik s a kihajlás a töltések ill. potencziálok mérésére szolgálhat. E czélból a kihajlás — ép úgy mint az előbb leírt húros műszereknél okulármikrométerrel ellátott mikroszkóppal leolvasható.

Th. Wulf ezen eszköz következő előnyeit említi az aluminiumleveles elektrometerek felett. A húros eszköznél nem eshetik meg az, a mi a leveles eszköznél elég gyakori, hogy a levelek nagyon szétcsapódnak és azután odatapadnak az óvólemezekhez. A leolvasás sokkal élesebb, mert az aluminiumlevelek rendesen kissé gyűröttek, míg a kvarczfonalak szépen ki vannak feszítve. A kiütések még mintegy 150 osztályrészig eléggé arányosak a feszültséggel. Az eszköz kapaczitása igen kicsiny (3—4 cm) míg a legkisebb kapaczítású leveles elektrométeré 5—7 cm, továbbá az eszköz kapaczitása a kiütésekkel is kevésbbé változik, mint a leveles műszeré.

A húros eszköz érzékenysége is nagyobb, mint a leveles elektrométereké. 0·006 mm vastag kvarczfonál alkalmazása mellett a 0—2·50 Voltnyi közben egy osztályrész 1·1 Voltnak felelt meg, míg a leveles eszközöknél ugyanezen közben csak 6—7 Volt tud egy osztályrésznyi kitérést létesíteni. A kis kapaczitás miatt a húros eszköz aránylag még érzékenyebb, ha elektromos mennyiségek mérésére használjuk fel. A húrok igen gyorsan elfoglalják egyensúlyi helyzetüket, úgy hogy jól lehet követni és esetleg regisztrálni a feszültségnek gyors ingadozásait is.

A Wulf féle eszközt a braunschweigi Günther et Tegelmeyer czég gyártja.

Edelmann is hirdet egy húros elektrométert, M. Th. Edelmann jun. igéri is még a Phys. Zeitschr. mult évi számában az eszköz leírását, mindeddig azonban ily leírás fizikai szaklapban nem jelent meg.

*

Bár a húros eszközök nehezen fogják felvehetni a versenyt a ma már minden irányban tökéletesített torziós eszközökkel, mindenesetre érdekes, hogy a csavarodáson kívül egy másik rugalmas alakváltozás, a kihajlás is alkalmas kis erőknek pontos lemérésére. Különösen pedig a váltakozó áramok lemérésénél jósolhatunk jövőt e műszereknek épen rendkívül csekély önindukcziójuknál fogva.

Zemplén Győző.

IRODALOM.

A modern fizikai axiómák válsága.

Magyar fizikai irodalmunk a teljesen önálló művekben nem mondható gazdagnak, különösen, ha az oly munkákra gondolunk, melyek hogy úgy mondjam, a fizika filozófiájának körébe vágnak. Már ez a körülmény magyarázatául szolgálhat annak, hogy dr. PÉCSI GUSZTÁV, esztergomi theológiai tanárnak a könyvpiaczon nem régen megjelent, önállóságtól duzzadó füzetével [1] részletesen foglalkozunk. A füzet czíme megmagyarázza annak tartalmát. Nem tartanám magamat méltónak a munka megbirálására, ha a megostromolt tételek megvédéséről lenne szó; ehhez csak sokkal hivatottabbak érezhetnek magukban kellő erőt. De erre nem lesz szükség; én csak arra akarok czikkemben rámutatni, hogy *oly módon*, a mint azt dr. PÉCSI úr tette, oly könnyelműséggel nem lehet, *nem szabad* természettudományi tételeket tárgyalni. Mert az olyfajta támadó lövegek, a minőkkel ő akarja a fizika hatalmas várának bástyáit szétzúzni, rombolás nélkül pattannak annak falairól vissza s a támadóban tesznek kárt.

*

Az **első fejezet** rövid tartalma a következőkben foglalható össze.

A XVIII. és XIX. század fizikusai kutatásaikban nem maradtak meg az empirikus téren, hanem átcsaptak a teoriák mezejére; kutatták a tünemények közt az összefüggéseket, keresték ezeknek legmélyebb okait és mindenféle «magas régiókat verdeső axiómák felállításán fáradoztak». Mivel ezen «phisica theoretica» nem is igazi fizika, hanem átcsap a metafizika régiójába, ezen axiómák ellenőrzése a bölcsészet feladata. Meg kell vizsgálni ezek helyességét a logika szabályai szerint és akkor ki fog tünni, hogy a mint kiteszszük ezeket a logika erős levegőjének, a mint hozzájok nyúlunk, a dialektika vaskezével, összeomolnak, mint

---

[1] *A modern fizikai axiómák válsága.* Irta dr. PÉCSI GUSZTÁV bölcsészeti tanár. (Budapest, Stephaneum nyomda r. t. 1907. 100 oldal.)

a kártyavár. Ezek az axiómák főleg: az actio-reactio egyenlőségének, az energia megmaradásának elve s az entrópia törvény. Legnagyobb fontosságú ezek közül a másodsorban említett, mely az összes fizikai axiómák középpontjának tekinthető.

Szerzőnk keresi azután, hogy ezen axiómák miféle viszonyban állanak a keresztény világnézettel s itt azon eredményre jut, hogy az energia megmaradásának elve nagy kárt tesz eme világnézet tudományos tekintélyében.

*

Ez a fejezet teljesen megvilágítja P. G. gondolkodásának egész mivoltját s megmutatja azon sarkalatos hibákat, melyeket az egész dolog felfogásában elkövetett. Régen volt az az idő, mikor a fizika, mint a filozófia egyik ága szerénykedett; ma már teljesen önálló tudomány, mely maga határozza meg terrénumát, melyen belül föltétlen úr. A hol maga határozza meg a vizsgálat módszereit, maga szabja meg a gondolkodás módját s a ki az ő területére lép, annak oly módon kell vizsgálódni, úgy kell gondolkodni, a mint azt a fizika parancsolja. Ha valamely népet akarok tanulmányozni, csak úgy végezhetek hasznos munkát, csak úgy érthetem meg annak életét, szokásait, különféle intézkedéseit, csak úgy mondhatok azokról helyes véleményt, ha lehetőleg bele tudom magam élni annak gondolkodásmódjába s minél nagyobb mértékben sikerült ezt elérni, annál helyesebb lehet a véleményem. Ezért teljesen czélt tévesztett dolog, hamis felfogás, hogy a fizikai tételeket pusztán a dialektika szabályai szerint vizsgálhatjuk meg. Ehhez nem elég az ügyes dialektika, nem elég a «józan ész»; mert a ki a fizika történetét csak kevéssé is ismeri, az tudja jól, hogy a helyes dialektika s a józan ész szabályai szerint milyen helytelen fizikai eredményeket állapított meg például Aristoteles. A fizika sokkal szilárdabb alapra építi tételeit a dialektika s az ú. n. «józan ész» bizonytalan talajánál, mikor ellenőrzőjéül a kisérleti eredményeket, a *tapasztalást* tekinti. Hogy ennek, a szerzőnk által teljesen félreismert empirizmusnak mi a fontossága, azt minden jóravaló fizikai kézikönyvben megtalálhatja, a ki akarja. És itt a fizikai axiómák sem tesznek kivételt; bizony nem merő spekulácziók ezek, mint P. G. gondolja. (11. l.) Nem is olyan nehéz megállapítani, miért biztosabbak így a fizika összes tételei, mintha csak a dialektikára bizzuk magunkat: ez utóbbi esetben ugyanis mindig fenyegethet az a veszély, hogy — bár következtetéseink helyesek — a premisszánk hibás lévén, helytelen konkluziókra jutunk (lásd ismét Aristotelest). *A fizikai tételekhez érdemlegesen csak az szólhat hozzá, a ki a fizika gondolkodásmódját elsajátította*, mert csak ennek birtokában válhatik arra képessé, hogy *azon tételek tartalmát megértse.*

Van még egy másik követelmény is: *alaposan kell ismerni az egyes axiómák keletkezésének, fejlődésének történetét.* A ki ezekben jártas, az nem fog a XXI. században az aristotelesi fizika álláspontjára helyezkedni, hanem meg fogja érteni annak a fordulatnak óriási fontosságát, a mit GALILEI adott a fizikának, midőn felismerte *a kisérlet* fontosságát s meg fogja érteni, miért biztosabbak, miért gyümölcsözőbbek a fizika eredményei azóta. Az nem fogja érvül felhasználni a fáról lehullott alma meséjét, mikor a gravitácziós törvények felfedezéséről beszél (11. l.); az nem fogja az energia megmaradásának elvét az őrült MAYER rögeszméjének tartani (21. l.); az nem fogja azt hinni, hogy a fizika bármelyik törvényét is megváltozhatatlannak tartják a tudósok (11. l.); hogy az energia megmaradásának elve egy-két kisérlet általánosítása (29. l.). Végül, a ki a fizika történetét ismeri, tisztában lesz azzal, hogy az igazi fizikust kutatásai közben nem vezeti más törekvés, mint hogy a természeti jelenségek bizonyos csoportját minél jobban megismerhesse. Nem akar ő vallást rombolni, ha pedig ezt teszi, már nem a fizikus szól belőle. Mikor általános principiumokat állapít meg, mikor az anyagot elpusztíthatatlannak, az energiát állandónak mondja, nem akar a vallásiakkal egyenlőrangú tételeket felállítani, mint P. G. hiszi (8. l.); ezen elvekkel semmi más czélja nincs, minthogy segítségökkel megérthetővé tegyen bizonyos jelenségeket, támaszpontokat nyerjen, melyeken megvetve lábát, könnyebben munkálkodhassék a fizika terrénumának minél teljesebb felkutatásában. Tehát nem fog a fizika történetének ismerője olyan megjegyzést tenni, hogy «a keresztény világnézet az összes fizikai axiómák **daczára** is szilárdan megáll a maga lábán». (8. l. jegyzet.) Ne bántsuk ezeket a tételeket azért, hogy a velök visszaélőket támadhassuk.

*

A **második fejezetben** szerzőnk, miután közli a NEWTON-féle három alaptörvényt, a harmadik axióma czáfolásával foglalkozik. Szerinte «*csak az egyensúly esetében* azonos a reactio az egész hatással. Más esetekben a *hatás eredménye megoszlik.* Midőn t. i. a hatás eredményeképp *mozgás* is lép fel, az actio = reactio + motus». Tehát, «ha a reactio mindig egyenlő volna az actióval, semmiféle helyi mozgás nem volna a világon», a mint azt minden diák tudja, a mint azt a józan ész, a praxis és a mechanika kivánja. Hiszen akkor a befogott ló hogyan tudná elhúzni a kocsit? Ellenben «*a mérleg,* melyen igazán egyenlő két nyomaték (igazán egyenlő actio és reactio) van, egy kukkot se mozdulhat». Az axióma czáfolatául szolgál továbbá a HELM-féle intenzitás törvény, mely szerint energia csak kisebb energiával biró testekre hathat.

A fizikusok kisérleti bizonyítékaira csak a következő fejezetben akar szerzőnk kiterjeszkedni.

*

Azzal kezdem, hogy a szóban forgó elv *tapasztalati elv*, vagyis számos kisérletből levont következtetés eredménye. Helyességét tehát csak úgy lehet megdönteni, ha oly eredmények, melyeknek megállapításánál ezen elvre támaszkodtak, a valósággal ellenkeznek. Itt pedig arra hivatkozom, hogy a csillagászat összes számításai ezen elven alapulnak s ezen számításokat a bolygók mozgásaiban évszázadok óta semmi sem hazudtolta meg. Már pedig nehéz lenne a «józan ész»-nek elképzelni, hogy valamely, csupa helytelen következtetéseken felépült tétel ilyen igazolást nyerhetne.

A tudományos elvek kritizálásának legelemibb alapföltétele ezen elvek megértése. Legjobb lesz, ha magához NEWTONhoz fordulunk, a ki mégis csak a legauthentikusabb forrás jelen esetben. Legelső megjegyzésem, hogy a III. axiómát P. G. mindkét helyen hibásan közli (12. és 14. l. 1. jegyzet), a mint egyáltalában nincs szerencséje az idézetekkel, a mi szintén jellemzéséül szolgálhat alapos munkálkodásának. Az axióma így szól: «Lex III. Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi».[1] A törvény után néhány példa van, köztük épen a kocsiba fogott lóé is, melyre nézve megmagyarázza NEWTON, hogy itt «tantumque impediet progressum unius, quantum promovet progressum alterius». (14. l.) Tovább olvasva, megtalálhatjuk, hogy «His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motum». (14. l.)[2] A mai fizika nyelvén szólva, az ide tartozó jelenségeknél a mozgásmennyiségek egyenlők. P. G. két nagy hibát követ el. Nem értvén meg a törvényt, nem vette észre, hogy itt az erők *hatásairól* van szó. Mivel pedig úgy látszik, nem tartotta szükségesnek, hogy a fizika alapfogalmaival tisztába jöjjön,[3] nem tudhatja, hogy különböző erőknek egyenlő hatásaik lehetnek, egyenlő erők pedig különböző hatásokat hozhatnak létre. Nem tudhatja, hogy itt erőhatásokról és *nem energiáról* van szó. Így aztán persze előhozakodik, mint fontos argumentummal, a HELM-törvénynyel.

---

[1] «Philosophiæ naturalis principia mathematica». (Editio tertia. Londini. MDCCXXVI. pag. 14.)

FRÖHLICH: Dynamika 7. §. 11. lap.

[2] A latin szöveget idézem, nehogy esetleg a fordítás legyen hibáztatható.

[3] Bármennyire tilalkozik is P. G. ez ellen több helyt (VIII. fejezet) mégis csak itt van a legfőbb baj.

Nem érti meg, hogy e tétel két test egymásra hatásáról szól s nem egy testre ható két erőről. Eklatáns példát ad arra, hogy mennyire homályos előtte az axióma tartalma, mikor a mérlegre hivatkozik. (17. l.) Azt hiszi, hogy a karokra ható erő és teher hozza létre az actiót és a reactiót!

*

A **harmadik fejezet** — a melyért íródott az egész munka — az energia megmaradása elvének czáfolatát tartalmazza. Mindenekelőtt megtaláljuk az erő meghatározását s mértékének megadását. Miután megtanuljuk, hogy a szóban forgó elv tulajdonképpen az energia mennyiségének állandóságát állítja, meghalljuk, hogy az elv szerzője, «Mayer Róbert, német orvos, ki életének egy részét tébolydában töltötte, onnan időről időre szabadon bocsátották, de végre mégis ott fejezte be pályafutását». (21. l.) A «világrengető elv» czáfolata következik ezután. Mivel az a Newton-féle III. axiómán alapul s ez helytelen, világos, hogy az energia megmaradásának tétele is hamis. Példát hoz fel ezután, melynél megmutatja az energiabeli abszolut veszteséget. «Ha egy követ szétzúzok kalapácscsal, a ráfordított energia egy része mozgássá (a kő ingadozása) változik, egy része hővé, de a legnagyobb rész magára a szétzúzásra, vagyis a kő tömecscohæsiójának a megszüntetésére megy.» A cohæsio megszünte pedig óriási erőveszteség. «Hiába mondaná valaki, hogy a kő tömecsei helyzeti erélyt nyertek, hogy ismét egyesülhessenek! . . . Maguk a kő tömecsei sohasem volnának képesek in æternum egyesülni, ha csak óriási kompresszióval a tömecseket oly közel nem hozom, hogy cohæsiójukat ismét gyakorolhassák. A minő erő szükséges a szétmorzsolt kő összeragasztására, oly erő ment veszendőbe a világenergiából a kő szétzúzásakor.» (23. l.) Sorra veszi most azon kisérletek legfényesebbjét, melylyel — szerinte — a fizikusok bizonyítani akarták az energia megmaradásának elvét, t. i. az ingával való kisérleti igazolást. Nem kevesebb, mint három nagy szofizmát állapít meg a jelenség szokásos értelmezésére nézve. (25—30. l.)

*

Nem is lehetett volna fényesebben bebizonyítania szerzőnknek, hogy mennyire megbosszulja magát a fizika alaptételeiben, sőt alapfogalmaiban való járatlanság, a fizika történetének nem ismerése, a fizika gondolkodásmódjának teljes ignorálása, mint a hogyan e fejezetben tette. Es nem nyujthatott volna eklatánsabb példát arra, hogy miképpen *nem* szabad a fizikához hozzászólani. Mert bizony hiába tiltakozik az elemi fogalmakban való tévedés vádja ellen (71., 74., 91. l.), e szemrehányás vele szemben teljesen jogosult, a mint az mindjárt ki fog derülni.

a) «A fizika erőnek nevezi a mozgás vagy bármely hatásnak *okát.*» (19. lap. *a)*) Valamikor csakugyan így volt, de a mai tudomány már helyesebbé tette ezt a definitiót s erőnek a mozgás *változásának* okát nevezi. Aztán a «mozgás» nem «hatás».

b) «... a mozgásmennyiséggel szokás mérni az erőt» (u. o.). Az erők *hatását* igen, de nem az erőt. Mert abból, hogy a két hatás egyenlő, még nem következik az erők egyenlősége.

c) «... a végzett munka szolgál az erők mértékéül» (u. o.). Ha ez igaz lehet, akkor például azt is mondhatom, hogy a területet méterrel mérem.

d) Szerzőnk szerint a v az erő intenzitását fejezi ki. Nem, hanem az mv vagy ft szorzat.

Az itt felsorolt hibák közül kettőt (a *c)* és *d)* alattit) Bognár P. is kifogásolta birálatában (VIII. fejezet *A.*); de szerzőnk visszautasítja a tudatlanság vádját s Dresselre és Fehér Ipolyra hivatkozik. Bár ne tette volna; mert most már igazán nem mosható le róla e vád. Idézünk.

«Az energia nagyságát — mondja Dressel I. 41. old. — meghatározhatjuk a *munka nagyságával*, melybe az energia átalakul». Még világosabban Fehér Ipoly (43. oldalon): «a munka arányos a működő erő nagyságával».

$$W = fs.$$

Ugyanazon úton tehát (s állandó lévén) a munka (W) az erőnek (f) *közvetlen* mértékéül szolgál!!» (71. l.)

Ez mind igaz. De szerzőnk persze nem tudja, mi a fontossága annak a zárójelben levő feltételnek, hogy s állandó legyen. Ekkor és csakis ekkor mértéke közvetlenül az erőnek a munka. Ő azonban ezt mondja: «Mivel (azonban) a mozgásmennyiség a szabadon mozgó test mozgását fejezi ki, újabban inkább a legyőzött akadályok, a végzett munka szolgál az erő mértékéül, melyet az erő s az út szorzata fejezi ki». (19. l.) Ez már helytelen.

P. G. nem tudja, mi a különbség erő és energia közt. Ebbéli járatlanságát máshol is bemutatja, mikor az «erő» és «eleven erő» fogalmait identikusaknak tekinti. De nem is akarja megtanulni e különbséget, sőt Helmholtzot is a maga védelmére szólítja fel. Igaz, hogy e tudós «Über die Erhaltung der Kraft» czímmel bocsájtja közzé értekezését, de a két eset közt mégis nagy a különbség. Mikor e fogalmak, tételek újak voltak, egész természetszerű a terminológiában való ingadozás, esetleg pontatlanság; de nem engedhető meg félszázaddal azok felfedezése után. Azután Helmholtz mégis tudta a különbséget «erő» és «energia» közt, P. G. pedig nem tudja. Éppen, mint mikor a mathematikus azt mondja, hogy a parallelogramma területe az alap és magasság szorzatával egyenlő, de e mellett tudja, hogy itt tulajdonképpen a mértékszámok szorzásáról van szó, a felületes diáknak pedig erről az igazi értelemről fogalma sincs. De hát P. G. az ilyen megkülönböztetést a bölcsészet magas piedesztálján állva, nagy lenézéssel, kis kaliberű fizikusok munkájának hagyja fönn. (91. l.) Nem a *név*, hanem a *fogalom* összezavarásában van a hiba!

«A fizika szerint $ft = mv$. Ebből következik, hogy ceteris paribus, vagyis ugyanazon tömeg és ugyanazon idő esetén (t és m állandó levén), v (a sebesség) f nagyságának, vagyis intenzitásának *közvetlen mérője.*» (72. l.) Persze, abban a speciális esetben, ha t és m ugyanazok, de általánosságban bizony nem.

Kár volt még Dresselt és Fehér Ipolyt is a tudatlanság gyanujába keverni; a mit ők jól mondtak, azt P. G. nem értette meg.

e) Mulatságos tévedésbe ejti szerzőnket most említett járatlansága, melyből kifolyólag nem tudja a viszonyt az «eleven erő» s az «energia» megmaradásának elve között. Így aztán hiába figyelmeztette Bognár P., hogy «a fizikusok az energia megmaradásának elvét nem az inga s a felhajított kő példájából merítették, hanem az általános tapasztalatból», dr. Pécsi úr ismét büszkén felüti Fehér Ipoly könyvét s rá akarja hárítani az ódiumot. Védekezése közben aztán (73. l.) kisül, hogy őtet a «helyzeti energia» s a «mozgási energia» kifejezései vezették tévútra, mert bizony Fehér I. idézett helyén az eleven erő megmaradásának elvéről van ám szó. Ez az elv pedig sem többet, sem kevesebbet nem mond, mint hogy ha a különböző mozgásoknál, melyek a mechanikában tárgyaltatnak, mathematikailag kiszámítjuk az egyes időpillanatokra a helyzeti s a mozgási energiát, ezeknek összege mindig ugyanakkora. Hogy pedig az energia megmaradásának elve, vagy pedig az erő megmaradásáé Newton III. axiómáján alapul-e vagy sem, a fölött annál hiábavalóbb a vita, mert ama III. axióma még ma is sziklaszilárdan áll.

f) Alapos tájékozatlanságra vall szerzőnk azon állítása, hogy az energia megmaradásának elve egy-két kisérlet általánosításának eredménye. (29. l.) Itt aztán megint hiába hivatkozik másra, jelen esetben Le Bonra. Nagyon felületesen olvashatta el ennek munkáját,[1] mert bizony ő nem gúnyolódik. Tessék csak jobban elolvasni s ne egyes kiszakított részlet félreértésével bizonygatni saját téves állítását.

g) Majdnem elfelejtkeztünk a *szétzúzott kő példájáról* beszélni, melynek P. G. úgy látszik, különös fontosságot tulajdonít. (22—23., 55., 62. l.) Ez azonban oly példa, mely sem meg nem döntheti magá-

[1] Erre mutat a 24. lap 1. jegyzete is, mely ismét pontatlanul idéz.

ban az elvet, sem nem bizonyíthatja magában és pedig azért nem, mert ezen jelenség számbeli viszonyai hozzáférhetetlenek. Viszont az energia megmaradásának álláspontján meg tudjuk magyarázni ezt a tüneményt is. NB. a kő tömecsei a cohæsiónál fogva bizonyos helyzeti energiával birnak; éppen fordítva, mint a hogy azt P. G. gondolja. Az elv azt mondja ez esetben, hogy az a munka, a mit a kő szétzúzására fordítok, egyenlő értékű a létrejövő hőenergiának s a szerteröpülő részecskék mozgási energiáinak összegével: tehát nincs energiaveszteség. Ha pedig azt hiszi valaki, mint P. G. is, hogy a szétröpülő parányi részecskék mozgási energiája nagyon kicsi, álljon valamelyiknek útjába s mindjárt meggyőződik az ellenkezőről.

h) Csak éppen utalok arra, hogy P. G. nincs tisztában, bár hivatkozik reá, a perpetuum mobile-vel (30. l.); pedig a védőpajzsul annyiszor elővett FEHÉR I. ban is megtalálhatta volna szépen, hogy mi annak lényege s tulajdonképpen miért lehetetlenség?

*

A **negyedik fejezetet** szerzőnk NEWTON két első axiómájának szenteli. Tárgyalásaink eredménye, hogy az első axióma felerészben igaz, a mennyiben ugyanis a nyugvó állapotban levő testről van szó, de másik része valótlanság; a második axióma csak féligazság, ugyanis ideális testre igaz, de fizikai testre alkalmazva egyoldalú, mert nincs fizikai test, mely csak egy erő hatásának volna alávetve.

*

A fejezet kritikájával hamar elkészülhetünk, ha rámutatunk az alapgondolatra — egyúttal alaptévedésre is — mely P. G. urat vezeti. Nem fogadja ugyanis el a fizika azon definitióját, mely az erőt a mozgásváltozás okának mondja. Nagyon valószínű, hogy puszta tévedésből, az erőt a mozgás okának tartja. Helytelen lévén a kiinduló pont, az ebből esetleg helyesen vont következtetések is hibás eredményre vezetnek, hiába a logika s a józan ész. Azután semmit sem akar arról tudni, hogy e törvény mindkét részének fölismerésében a *tapasztalat*nak s az *inductió*nak mi szerepe volt. Pusztán annak illusztrálására, hogy szerzőnk e fejezetben sem tagadja meg magát, hozok fel néhány példát.

a) Az axiómák idézésében ismét nem pontos s a másodikban helytelen is. Ez utóbbi szerint ugyanis a mozgás változása a mozgató *külső* erővel arányos.[1]

---

[1] «Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel mo-

b) Az erőfogalom helytelen definitiójából kiindulva, azt következteti belőle, hogy e szerint véges erőimpulzus örök mozgást szülhet. Dehogy! Véges erőimpulzus, *épp az axióma értelmében*, véges mozgás*változást* hoz létre.

c) Dr. Pécsi úr mozgásmennyiséget din-ekkel mér! De hát az ilyen lappáliákkal csak kis kaliberű fizikusok bibelődnek.

d) Minő világosan átérti e két axióma tartalmát, mutatja, hogy egészen komolyan tárgyalja ellenérvül, hogy a természetben előforduló mozgásokat a súrlódás, közeg ellenállása előbb-utóbb megszünteti; tehát «Newton I. törvényének kritikus második felét, az örök mozgást, *kísérletileg nem lehet igazolni*». (42. l.) Milyen jó volna tudni, hogy miképpen jöttek létre ezen axiómák!

e) Az Atwood-gépről szólva, ismét azt hiszi, hogy az actiót és reactiót a két oldalt lefüggő súlyok hozzák létre!

*

A mozgás *igazi* alaptörvényeire (V. fejezet) ezek után nincs miért szót fecsérelni, bármilyen nagy véleménynyel van P. G. azok értékéről s bármennyire tudom, hogy e nyilatkozat után szerzőnk engem is az «új kapu» előtt állók közé (91. l.) fog sorolni.

*

A **hatodik fejezet** az entrópia-törvény birálatával foglalkozik s bizonyítja, hogy «a világenergia nem alakul át hővé», hanem folytonos csökkenésben van.

*

Az entrópia-törvény ellen többrendbeli kifogás merült fel komoly fizikusok részéről is s ezt a kérdést dr. Pécsi úr szintén érdemleges vizsgálat alá vehette volna. De azon általános baja, mely az előbbi fejezetek megírásánál annyira tévútra vezette, itt is csak rontott munkálkodása eredményén. Ez a baj mindazoknak a baja, a kik a logikai szabályok mindenhatóságára esküdve, utoljára mindenütt *csak* ezeket a formulákat látják s vagy mindenáron bizonyítani, vagy mindenáron czáfolni akarnak. Így aztán nem lehetnek objektivek s nem tudnak kellő önkritikát gyakorolni.

---

vendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur». Newton i. m. 13. l. Fröhlich i. m. 11. l.

P. G., mintha az elmult idők elismert nagy fizikusai mind ostoba, szofisztikus gondolkodással teli, vagy bolondokházából kiszabadult őrültek lettek volna, a legnagyobb határozottsággal odavágja, hogy az általa czitált entrópia-törvény «egyszerű *misztifikáczió*» (55. l.), de ha keressük, hogy eme nagyhangú állítását mivel *bizonyítja*, azt találjuk, hogy semmivel. Mivel «a nagy természetben végbemenő mozgásoknál az *energia-töredék, mely a mozgásenergiából hővé változik, elenyésző csekély, a világ-energiának forgácsait teszi csupán*, sokszor pedig zérussal egyenlő» (54. l.), tehát nem igaz, hogy a világban eltünő energia mind hővé változik. Ilyenek az ő bizonyítékai és bizonyításai véges-végig, vagy pedig igaznak veszi az előbbiekben előadott okoskodásait s arra építi további következtetéseit.

*

Néhány szóval befejezem czikkemet. Czélom annak kimutatása volt, hogy ilyen módon nem lehet hozzáfogni fizikai axiómák megczáfolásához vagy bebizonyításához; ahhoz a fizikus gondolkodásmódjának teljes elsajátítása, a tárgyalt tételek tökéletes átértése s a fizika történetének sokkal nagyobb ismerete szükséges. Szó sincs arról, mintha én az itt megtámadott elveket dogmákként tekinteném vagy éppen a materialisták malmára akarnám hajtani a vizet. A fizika tételeinek a hit elveivel való összekapcsolására nézve fönnebb már elmondottam nézetemet; azt pedig senkisem tudhatja, hogy évszázadok, esetleg évtizedek mulva mennyire fog haladni a fizika a természet igaz törvényeinek felismerésében. A fizika összes tételeit szabad támadni, de nem *ilyen* módon.

Már az egész munka külső hangja is nagyon elüt a komoly tudományos vizsgálódás tónusától. Csak úgy hemzseg a «teljesen légből kapott», «misztifikáczió», «alaptalan», «szofizma» stb. kifejezésektől. Jó lenne tudni, hogy szerzőnk milyen véleménynyel van maga felől, ha hosszú idők elismert tudósait olyan alacsony nivón állóknak tartja, ha például Newton szerinte csak oly okos ember volt, hogy gondolkozásának eredményeit minden iskolásgyermek tönkreczáfolhatja s ha az ő nagyságát csak mindenféle szofisztikus erőszakoskodásokkal lehetett fentartani stb.? Így, ha csak talán személyes vita keretében, de különben nem szoktak komoly tudósok beszélni. Vajjon milyen véleménynyel lenne azon ember felől dr. Pécsi úr, a ki Aristotelest ilyen buta embernek nevezné ki? Pedig hasonló móddal lehetne.

A hiba, a mibe P. G. beleesett, nagyon közelfekvő; szolgáljon mentségére, hogy a sokkal nagyobb Aristoteles is így járt. A «dialektika s a józan ész» föltétlen tekintélyét vallván, annyira beleélte magát abba, hogy mindenütt a következtetések esetleges hibáit firtassa, hogy nem jutott eszébe a premisszája helyességének a megvizsgálása. Mit használ pedig a józan ész s a dialektika összes szabálya, ha kiinduló pontunk helytelen? Ez a hiba nála.

Newton I. és II. axiómájánál hibája, hogy az erőnek rég elvetett, rossz definitiójából indul ki. A III. axiómában nem érti meg, hogy mi az actio és a reactio. Az energia megmaradása elvénél részint összezavar heterogén fogalmakat, részint az eleven erő tételét s az energia tételét keveri össze-vissza. Mert ő nem akart mást, mint *czáfolni.*

A könyvére tett megjegyzések is nem azoknak objektiv átvizsgálására vezették; azokat is csak czáfolni akarja s nem veszi észre, hogy még jobban elrontja a maga dolgát. Sőt itt úgy látszik, még a mathematikát is meg akarja reformálni; legalább erre mutat azon következtetése, melyet a 81. lapon találhatunk. Kuriózumképpen igazán érdemes elolvasni!

Természetesen csak a főbb pontokra terjeszkedhettem ki. Eszem ágában sincs azt hinni, hogy dr. Pécsi urat megingathatom véleményében; a ki elolvassa könyvének VIII. fejezetét (Ellenvetések czáfolata), az tudni fogja, miért. Ő arra a gondolatra jutott, hogy szükséges lenne az energia megmaradásának elvét megdönteni (9. l.) s ettől fogva minden, ezzel valóban vagy csak látszólag összefüggő tételben kizárólag a hibát kereste s mindezekben hibát *akart* találni. Ez persze sikerülhetett is, lévén kezében a dialektikának hatalmas fegyvere, de csakis ezzel sikerülhetett; mert egyedül a dialektika teszi képessé a vele élőt, hogy segélyével mindent, a mit tetszik, bebizonyítson, vagy mindent, a mit tetszik, megczáfoljon. Az igazi tudományt azonban ilyen úton sem megdönteni, sem előrevinni nem lehet.

Péch Aladár.

A Mathematikai és Physikai Társulat tizenötödik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 5-én kibocsátott meghivójára a Mathematikai és Physikai Társulat XV. rendes közgyűlését f. évi május hó 2-án tartotta meg, a melyen több vendégen kívül a következő tagok vettek részt:

Anderkó Aurél, Andor Tivadar, Balog Mór, Bauer Mihály, Bodola Lajos, Bozóky Endre, Csemez József, Demeczky Mihály, Dietz Lajos, br. Eötvös Loránd, Erdődy Imre, Feichtinger Győző, Fényes Dezső, Fraunhoffer Lajos, Gáti Béla, Goldziher Károly, Grúber Nándor, Harsányi Dezső, Hausbrunner Vilmos, Hoor Mór, Jánosi Imre, Kármán Ferencz, Károly Irén (Nagyvárad), Képessy Imre, Kirchknopf András (Kassa), Klupathy Jenő, Kőnig Dénes, Kőnig Gyula, Konkoly Thege Miklós, Kopp Lajos, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lévay Ede, Mattyasóvszky Kasszián (Győr), Mikola Sándor, Mórotz Kálmán, Péch Aladár, Pécsi Albert, Pekár Dezső, Privorszky Alajos, Rados Gusztáv, Raffmann Jákó, Rátz László, Réthy Mór, Riesz Marcel, Róna Zsigmond, Rucsinszki Lajos, Sós Ernő, Steiner Lajos, Szabó Gábor, Szabó József (Vácz), Szekeres Kálmán, Széky István, ifj. Szily Kálmán, Szőke Béla, Terlanday Emil, Tőtössy Béla, Wagner Alajos, Winter József, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1908-ra.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Pénztárnok és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést báró Eötvös Loránd elnök nyitotta meg. Szivélyes, meleg szavakkal üdvözli a számos résztvevőt és különösen a vidéki tagokat, a kikre való tekintetből a közgyűlést követő rendes előadó ülés tárgyai választattak.

A mult évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jelen ülés jegyzőkönyvének hitelesítésére Szabó József és Terlanday Emil tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Tagtársaink bizonyára némi csodálkozással vehették Lapunk most befejezett évfolyamának egyik terjedelmesebb czikkét, mely a nemzetközi segédnyelvet tárgyalta. E mozgalom, mely az újkor nagy philosophusaihoz, egyebek között Leibnizhez vezet vissza, az utolsó párizsi világkiállítással kapcsolatos számos kongresszus alkalmából újra éledt, és bármiként vélekedjünk is az eszme megvalósíthatásáról, czélját tekintve rokonszenves és tiszteletreméltó és a nemzetközi békekonferenczia törekvéseinek értékével legalább is összemérhető. Az eszme előharczosai túlnyomóan mathematikusok és az exakt tudományok emberei; Couturat és Leau, az állandó bizottság két titkárának iratai, a mathematikai gondolkodás világával mélyen hatolnak és vezetnek be nyelvek szellemébe.

Társulatunkat az a megtiszteltetés érte, hogy — nem jelentkezés, hanem a vezetőség határozott felszólítása folytán — az előkészítés munkájában részt vegyen. Mélyen tisztelt elnökünk a csak 12 tagból álló bizottságba való megválasztását szerényen elhárította magától és így választmányunk titkártársamat bizta meg Társulatunk képviseletével.

Az előmunkálatok annyira haladtak, hogy az elmult október végén a kérdést végleg eldönthették és az új nyelv hivatalos folyóiratának első két füzete már meg is jelent. Rados tagtársunk e tanácskozásunkban nem vehetett részt és így nem valószínű, hogy a lényegében már meglévő nyelv szellemét a mi anyanyelvünk inspirálhatta volna, noha néhány markáns sajátsága bizonyára egyszerűsíthetné kifejezésmodorát.

Kis Társulatunknak mindenesetre jóleső figyelem, hogy a messze távolban is észrevették és közreműködését becsülik.

Az év legjelentősebb mozzanata, melyet szeretettel és figyelemmel kisérünk, a mathematikai tanulóverseny. Értékelésére nem kevéssé fontos, hogy példánkon indulva immár a philologusok is tartanak hasonló versenyeket. A mi tanulóversenyünk, a sorozatban a 14-ik, 1907 október 12-én folyt le, figyelemreméltó sikerrel, melyet nem csupán a résztvevők és a beadott dolgozatok nagy száma, hanem azok értéke is fokozott. Az első díjat Tolnai Jenő, a másodikat Domokos György nyerte el, és ezenkívül akadt még három dolgozat, melyet a biráló bizottság dicsérettel említett.

Folyóiratunk XVI. kötete 26 ív terjedelemben megjelent. Az utolsó kötetben még nem volt módomban a laboratorium rovatát, melynek vidéki tagtársaink talán legnagyobb hasznát vehetnék, feleleveníteném, de már az idénre oly biztató igéreteket kaptam, hogy a jövőben az iránt talán nem lehet panaszunk.

A társulati élet a megszokott mederben folyt: kilencz rendes előadó ülés változatos tárgysorozatával most is együtt tudta tartani szorgalmas kitartó hallgatóságunkat. Előadásaink úgy, mint folyóiratunk czikkei több új nevet hoztak forgalomba, a melyekről reméljük, hogy a jövőben is hathatósan támogatják törekvéseinket.

Tagtársaink száma az elmult év végén 405 volt, előfizetőink száma pedig 84. Gazdasági helyzetünk sivárságát legelsőbben a luxusczikkek visszautasítása árulja el és fájdalom, sokan tudományos társulatok tagságát is ide sorolják. Annál biztatóbb reánk nézve, hogy e tekintetben épen semmi jogunk panaszkodnunk. Hogy tagtársaink számának állandósága mellett is anyagilag mindinkább megerősödtünk, az kizárólag ügybuzgó pénztárnokunk érdeme. Annál fájdalmasabban vette a Választmány Feichtinger társunknak a pénztárnoki tisztről való lemondását és utóbb annak a bejelentését, hogy szándéka megmásíthatatlan.

Így kényszerült a Választmány pénztárnok jelölésére és bizonyára a leghelyesebben cselekedtünk, midőn jelölésünkben épen a távozó pénztárnok tanácsát kértük ki, a ki Társulatunk ügyeit oly ritka odaadással és szeretettel vezette.

Szomorúsággal kell megemlékeznem Ferenczy István, Fettl Lipót, Fölser István és Stauber József tagtársaink elhunytáról. Kegyeletesen fogjuk megőrizni emléküket.

A Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya és Mathematikai és Természettudományi Bizottsága az elmult évben is kegyes volt Társulatunkat 2000 koronával segélyezni. Őszinte hálánkat fejezve ki e támogatásért, mely nekünk életkérdés, reméljük, hogy az Akadémiában is szükségesnek mutatkozó takarékosság mellett is, erre a jövőben is számíthatunk. E reményünk okadatolásául szabad talán arra hivatkoznunk, a mit épen a legutóbbi akadémiai választások fényesen igazoltak, hogy szigorúan tudományos Társulatunk szakavatott vezetése mellett nevelkednek fiatal tudósok, a kikre az Akadémia is reménynyel tekint.

Kifejezve még hálás köszönetünket szíves munkatársainknak, kérem a Tisztelt Közgyűlést, hogy e jelentésemet tudomásul venni sziveskedjék.

Budapest, 1908 május 2-án. *Kövesligethy Radó.*

3–4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1908-ra és a pénztárvizsgáló bizottság jelentése.

Mélyen tisztelt közgyűlés!

Mint az itt kiosztott nyomtatványból olvasható

összes bevételeink	9657·29 kor.	
kiadásaink pedig	6496.80 kor.-át	tettek ki
tehát	3160·49 kor.	

pénztári maradványunk van, részint készpénzben (735·60 kor.), részint takarékpénztári betétben (2424·89 kor.)

Ezen felül van még némi követelésünk is, de tartozásaink is vannak;

követeléseink: tagdíjhátralékok	300·— kor.
hirdetési díj	380·— kor.
összesen	680·— kor.

Tartozásaink fedezésére tehát 3840·49 kor. állana rendelkezésünkre

Tartozásunk a Franklin-Társulatnak	1536·54 kor.-val
még eddig ki nem egyenlített írói t. díjak pedig	1612·— kor.-t
tesznek ki, tehát	3148·54 kor.

Az évi tagdíjakból 245 kor. kevesebb, a hátralékokból 48 kor. az előfiz. díjakból 38 kor., kamatokból 49 kor. 46 f. több folyt be, mint a mennyit előirányoztunk, ellenben a hird. díjakból előirányzott 380 kor.-ból semmit sem vettünk be, ennek egy része úgy látszik veszendőbe fog menni.

A nyomdai költségek teljesen nem voltak kifizethetők, valamint az írói t. díjaknál is nagy hátralékunk van, ezen összegek a f. évben lesznek kiegyenlítendők, valószínűleg némi megtakarítások fognak mutatkozni. Az expeditio és irodai költségeknél 116 kor. 78 f. volt megtakarítható. Vegyes bevételek és kiadások, jobban mondva átmeneti bevételek és kiadások között jelentősebb külömbség nincsen.

Alaptőkénk 80 kor.-val szaporodott, mert Fényes Dezső tagtársunk eddigi 120 kor. alapítványát 200 kor.-ra egészítette ki.

Az 1908. évi költségvetést az 1907. évi alapján állítottam össze, a hol csak annyiban különbözik, hogy míg ez utóbbit deficit nélkül lehetett lezárni, addig az 1908. évi költségvetésünk 768 kor. 05 f. hiányt mutat, melynek eltüntetése csak úgy lesz lehetséges, ha M. T. Tagjaink pontosabban fogják megfizetni tagsági díjaikat, vagy valamely nem várt segítségben fog Társulatunk részesülni.

Most pedig, midőn az előterjesztett zárszámadás és költségvetés elfogadását kérném, s mielőtt még pénztárnoki állásomtól végleg megválnék, hálás köszönetet mondok a M. T. közgyűlésnek belém helyezett és időnkint megújított bizalmáért. Kérem a M. T. közgyűlést, Társulatunk M. T. Tagjait szíveskedjenek engem jó emlékükben megtartani.

A közgyűlés e jelentést helyeslőleg tudomásul veszi, az alábbi számadás és költségelőirányzat tételenként való mérlegelése és a pénztárvizsgáló-bizottságnak felolvasott jelentése alapján a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és 1908-iki költségelőirányzatát elfogadja.

Szomorú tudomásul veszi a pénztárnok határozottan visszavonhatatlannak jelzett lemondását és a Társulat anyagi jólétét sikerrel munkálkodó buzgó fáradozásáért őszinte köszönetét és háláját mondja ki.

1907. é

BEVÉTEL	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
1906. évi zárszámadási maradvány	3572	45	3572	45
Alapitói dij	—	—	80	—
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	2155	—
Hátralékos tagdijak	300	—	348	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	380	—	—	—
Kamatok	550	—	599	46
Előfizetési dijak	750	—	788	—
Vegyesek	—	—	114	38
			9657	29

Vagyon

VAGYON	1906. év végén		1907. év végén	
Forgó tőke:	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Készpénz	707	46	735	60
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	1890	19	1283	09
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	926	—	1093	—
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	800	—	880	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2262	—	2262	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Tagdijhátralék	250	—	300	—
Föl nem vett hirdetési dij	280	—	380	—
	17372	45	17190	49

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtu

A választmány megbizásából: *Kövesligе*

Rátz László s. k. *Beke Manó dr.* s. k. üg

1908. évi költsé

BEVÉTEL	1907. évi		1908. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Zárszámadási maradvány	3572	45	3160	49
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	2400	—
Hátralékos tagdijak	300	—	300	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	380	—	380	—
Kamatok	550	—	550	—
Előfizetési dijak	750	—	750	—
Hiány	—	—	768	05
			10308	54

árszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek a mult évre	1969	57	1969	57
a folyó évre	3400	—	1957	15
Irói tiszteletdijak a mult évre	780	—	—	—
a folyó évre	2600	—	1310	—
Expeditió- és irodai költségek	1000	—	883	22
Középiskolai tanulóverseny	160	—	158	—
Vegyesekre	42	88	138	86
Alaptőkéhez			80	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			735	60
b) takarékp. betétben			2424	89
			9657	29

nérleg.

TEHER	1906. év végén Kor.	fill.	1907. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	1969	57	1536	54
Irói tiszteletdijak	780	—	1612	—
Tiszta vagyon	14622	88	14041	95

Budapesten, 1908 márcz. 28-án.

dó dr. s. k. A közgyülés megbizásából:

ár. *Bogyó Samu* s. k. *Balog Mór* s. k.

előirányzat.

KIADÁS	1907. évi előirányzat Kor.	fill.	1908. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai költség a mult évre	1969	57	1536	54
a folyó évre	3400	—	3400	—
Irói tiszteletdijak a mult évre	780	—	1612	—
a folyó «	2600	—	2600	—
Expeditió- és irodai költségek	1000	—	1000	—
Középisk. tanulóverseny	160	—	160	—
Vegyesekre	42	88	—	—
			10308	54

Feichtinger Győző
pénztárnok.

5. Pénztárnok és választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a választmányból Beke Manó, Grúber Nándor, br. Harkányi Béla és Réthy Mór kilépnek. Elnök úr jelenti továbbá, hogy Feichtinger Győző, a Társulatnak tíz éven át volt buzgó pénztárnoka a Választmánynak már 1907 szeptember 24-én bejelentette lemondását, és hogy csak a Választmány határozott kérésére viselte tisztjét e közgyűlésig. Ennélfogva pénztárnok is választandó. A választmány e helyre Lévay Ede tanár urat ajánlja.

A választás idejére elnök felfüggeszti az ülést és Zemplén Győző elnöklete mellett Kőnig Dénes és Péch Aladár tagtársakból álló szavazatszedő bizottságot küld ki.

A választás megejtetvén, a bizottság elnöke jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 53 szavazatból Beke Manóra 52, Grúber Nándorra 47, br. Harkányi Bélára 52 és Réthy Mórra 52 szavazat esett. Szavazatot kaptak még Bauer Mihály és Demeczky Mihály.

Pénztárnokul 50 szavazattal Lévay Ede választatott meg.

A Választmány tehát teljességében megmaradt, Feichtinger Győző pénztárnok helyére ellenben Lévay Ede lép.

6. Indítványok.

Indítvány nem adatott be, tehát a napirend utolsó pontja magától elesik.

*

Elnök végre a pénztár vizsgálására a közgyűlés részéről ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtársakat kéri fel és a közgyűlést berekeszti.

*

A közgyűlést rendes előadó ülés követte, melynek tárgyai voltak: Konkoly Thege Miklós: A fotografálás értéke a csillagászati tudományban, illusztrálva Wolf Maximilián heidelbergi tanár égi felvételeivel; és Klupathy Jenő: Néhány újabb eszköz és kisérlet bemutatása.

A Mathematikai és Physikai Társulat XV. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 10-én tartott XV. tanulóversenyre Budapesten 73, Kolozsvártt 7 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett teljesen rendben folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen jegyzőkönyv vétetett fel, melynek tanúsága szerint a tételek kidolgozására engedett 4 órai idő alatt Budapesten 70, Kolozsvártt 7 dolgozat adatott be. A mult évhez képest a versenyzők száma 9 czel, a beadott dolgozatok száma 22-vel nőtt.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Bebizonyítandó, hogy az a, b páratlan egész számok köbeiből alkotott $a^3—b^3$ különbség akkor és csak akkor osztható 2-nek n-edik hatványával, ha $a—b$ osztható 2-nek n-edik hatványával.

2. Bebizonyítandó, hogy bármely derékszögű háromszögben az átfogó n-edik hatványa nagyobb a befogók n-edik hatványainak összegénél, ha n 2-nél nagyobb egész szám.

3. A körbe kétféle szabályos tízszög írható. Az egyiket, a közönséges szabályos tízszöget úgy kapjuk, hogy a kör kerületét tíz egyenlű részre osztjuk és a szomszédos osztópontokat kötjük össze egymással; a másikat, a szabályos csillagtízszöget úgy kapjuk, hogy minden osztópontot két-két osztópont átugrásával a rákövetkező harmadik osztóponttal kötjük össze. Bebizonyítandó, hogy e kétféle szabályos tízszög oldalainak különbsége egyenlő a kör sugarával.

A versenydolgozatok nyomban a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes birálatra Szijártó Miklós tanár úrnak adattak ki. A teljes biráló bizottság üléséről és határozatáról a következő jegyzőkönyv számol be.

Jegyzőkönyv

a math. és phys. társulattól a XV. mathematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbirálására kiküldött bizottságnak 1908 nov. hó 8-án tartott üléséről.

Jelen voltak Kőnig Gyula elnöklete mellett: Eberling József, Kopp Lajos, Kőnig Dénes, Kövesligethy Radó, Rados Gusztáv, Szekeres Kálmán, Szijártó Miklós.

A biráló bizottság a beadott dolgozatokat (Budapesten 70, Kolozsvártt 7) Szijártó Miklós előadó jelentéstétele után beható vizsgálat alá vette és azután következőképpen határozott:

Az I. díjat Orphanides Etelkának, az Országos Nőképző Egyesület leánygimnáziuma volt növendékének és Szabó Gábor tanítványának itéli oda, a ki mind a három feladatot helyesen és szabatos fogalmazással oldotta meg. A II. díjat pedig Kudlák Lajosnak, a losonczi áll. főgimnázium volt növendékének és Ondrus Pál tanár tanítványának itéli, a ki az első feladatot jól megoldotta, a harmadik feladat megoldásánál pedig geometriai szemlélőképességének erős bizonyítékát nyujtja, annak daczára, hogy a masodik feladat megoldását, a mi alig érthető, a binomiális képlet értelmének teljes félreismerésével, elhibázta.

Végre a bizottság dicséretre méltónak találta még:

Girsik Géza, Görög Frigyes, Háuck Jenő és Klenics Barnabás dolgozatát.

Budapest, 1908 november 8-án.

Szijártó Miklós, a biz. előadója, *Kőnig Gyula,* a biz. elnöke.
Éberling József, *Kövesligethy Radó,*
Kőnig Dénes, *Rados Gusztáv,*
Kopp Lajos, *Szekeres Kálmán,*
a biráló bizottság tagja.

A f. évi november hó 12-én tartott választmányi ülés e jelentést tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag hozzájárulván, azt határozattá emelte.

A nyomban rá tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, a mire báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek meleghangú, rövid beszéd kapcsán kiosztotta a jutalmat, kérve őket, hogy volt tanáruknak is adják át a Társulat üdvözletét.

A Mathematikai és Physikai Társulat XV. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Orphanides Etelka dolgozata.

1. feladat.

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

1. Az a^3-b^3 kifejezésnek $a-b$ tényezője. Tehát, ha $a-b$ osztható 2^n-el, a^3-b^3 is osztható.

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

2. A fenti szorzat második tényezője mindig páratlan szám. Az a^3-b^3 kifejezés tehát csak akkor osztható 2^n-el, ha $a-b$ osztható vele.

2. feladat.

$c^n > a^n + b^n$.

c^n-el osztva az egyenlőtlenseg mindkét oldalát:

$$1 > \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n;$$

$$1 > \sin^n\alpha + \cos^n\alpha; \qquad (1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha > \sin^n\alpha + \cos^n\alpha.$$

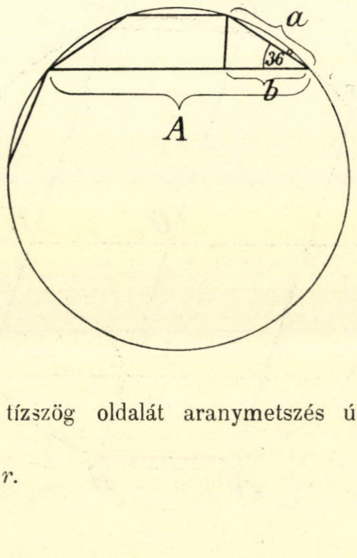
Ez az egyenlőtlenség fennáll, mert a $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$ törtérték lévén,

$$\sin^2\alpha > \sin^n\alpha, \text{ (ha: } n > 2) \text{ és } \cos^2\alpha > \cos^n\alpha.$$

3. feladat.

Az ábrából látható, hogy:

$$A-a = 2b;$$
$$\text{«} \quad = 2a\cos 36°;$$
$$\text{«} \quad = 2a\frac{1}{\sqrt{5}-1};$$
$$\text{«} \quad = 2\left(\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{r}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}-1},$$



mert a szabályos tízszög oldalát aranymetszés útján kapjuk a kör sugarából.

Innen: $A-a = r$.

II. Kudlák Lajos dolgozata.

I. 1°. Kifejezésünk így is felírható:

$$a^3—b^3 = (a—b)(a^2+ab+b^2).$$

Ebből a feladat első tétele evidens.

2°. A feltétel szerint a és b páratlan egész számok, s így egymással való szorzatuk is. De három páratlan szám összege szintén páratlan, s mint ilyen nem osztható 2^n-nel.

Ha tehát $(a—b)$ nem osztható 2^n-nel, $(a^3—b^3)$ kifejezés sem.

II. Legyen a derékszögű háromszög két befogója a, b, átfogója c; akkor

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Emeljük ez egyenlőséget $s = \frac{n}{2}$ hatványra.

$$c^{2s} = a^{2s} + \binom{s}{1} a^{2(s-1)} b^2 + \cdot \cdot + \binom{s}{s-1} a^2 b^{2(s-1)} + b^{2s}. \qquad 1)$$

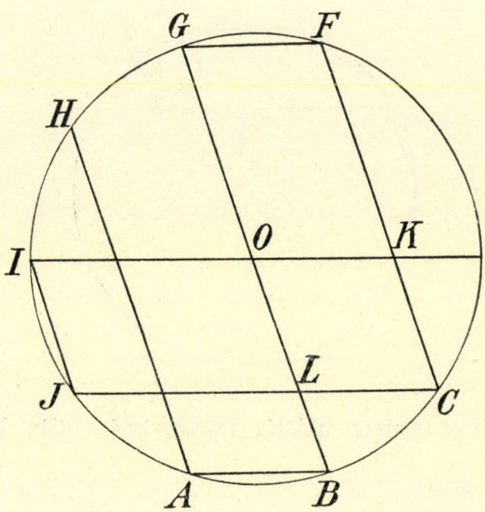
Minthogy a, b, c pozitiv számok, a

$$c^{2s} > a^{2s} + b^{2s}$$

egyenlőtlenség helyessége 1)-ből kitűnik.

$2s$ helyébe $\frac{n}{2}$-t téve:

$$c^n > a^n + b^n.$$



III. Legyen AB a szabályos tízszög, s JC a szabályos csillag tízszög egy oldala.

Minthogy

$$\overline{JI} \parallel \overline{AH} \parallel \overline{BG} \parallel \overline{CF} \text{ és}$$
$$IK \parallel JC$$

következik, hogy

$$\overline{IK} = \overline{JC}.$$

De

$$\overline{AB} = \overline{GF} = \overline{OK}.$$

Tehát

$$\overline{JC} - \overline{AB} = \overline{IK} - \overline{OK} = r.$$

Utalványczim : Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1908. évi jan. hó 1-től máj. hó végéig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1905. évre: Dietzl E. Lajos 10 kor. Gedő Miksa 4 kor., Szathmáry Jenő 6 kor., Visnya Aladár 6 kor. Összesen ... ... 26 kor.

1906. évre : Antal Márkus 6 kor., Aranyosi Miksa 10 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Kacsoh Pongrácz dr. 10 kor., Kerékgyártó Jenő 6 kor., Róth Ágoston 6 kor., Szathmáry Jénő 6 kor., Visnya Aladár 6 kor. Összesen ... ... 60 kor.

1907. évre : Bauer Mihály 10 kor., Bozóky Endre dr. 10 kor., Bozzay Zoltán 10 kor., Bugarszky István 10 kor., Cholnoky Jenő dr. 6 kor., Dienes Pál 10 kor., Dombay Narczisz 6 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Gerhardt Henrik 6 kor., Habán Mihály dr. 6 kor., Kerékgyártó Jenő 6 kor., Konkoly Thege Miklós dr. 10 kor., Lakits Ferencz dr. 10 kor., Lengyel Endre 6 kor., Nagy Gyula 6 kor., Pech Aladár 10 kor., Riesz Marczell 6 kor., Riesz Frigyes dr. 6 kor., Roth Ágoston 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Velies Lajos 10 kor., Visnya Aladár 6 kor., Zemplén Győző dr. 10 kor. 182 kor

1908. évre : Angehern Tivadar 10 kor., Bálint Elemér 6 kor., Balla József 6 kor., Barabás Jenő 6 kor., Bárányi Balázs 6 kor., Beck Károly 6 kor., Bozóky Endre dr. 10 kor., Bozzay Zoltán 10 kor., Bretz Berta 6 kor., Bukovszky János 6 kor., Cholnoky Jenő dr. 4 kor., Demeter István 6 kor., Dienes Pál 10 kor., Feichtinger Győző 10 kor., Félegyházy Antal 6 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Frank István 6 kor., Gotthard Jenő 6 kor., Hang Dániel 6 kor., Havas Miksa 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Ilosvay Lajos dr. 10 kor., Javorik János 6 kor., Jordán Károly dr. 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Király Henrik 6 kor., Kirchknopf András 6 kor., Kiss Gábor 6 kor., K. Kiss József 6 kor., Klatt Román 6 kor., Klein Pál 6 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., Konkoly Thege Miklós dr. 10 kor., Korda Dezsó 6 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Adolf 6 kor., Kovács Ferenez 6 kor., Kövesi Ferencz dr. 6 kor., Kövesligethy

Radó dr. 10 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lóky Béla dr. 6 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Malatin Gotthárd 4 kor., Markoss Imre 6 kor., Mattyasovszky Kászon 6 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Miller Gyula 6 kor., Módly Krizsó 6 kor., Nagy Gyula 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Novothny Endre 6 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pék János 6 kor., Privorszky Alajos dr. 10 kor., Radó Simon 6 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Riesz Frigyes dr. 6 kor., Riesz Marczell 6 kor., Schwartz Ottó dr. 6 kor., Simon Ferencz 6 kor., Simon Tádé 6 kor., Szabó János 6 kor., Szabó József 6 kor., Szakmáry József 6 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Székely Károly 6 kor., Széky István 6 kor., Szijártó Miklós 10 kor., Szőke Béla 10 kor., Tangl Károly dr. 6 kor., Terlanday Emil 10 kor., Tersztyanszky Gyula 6 kor., Ulreich Ede 6 kor., Vámos Dezső 10 kor., Vizsnya Aladár 6 kor,. Wéber Márton 6 kor. Összesen ... ... 554 kor.

1910. évre: Sinkó József 6 kor. Összesen ... ... 6 kor.

1911. évre: Sinkó József 6 kor. Összesen ... ... 6 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1907. évre: Aradi áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti II. k. áll. főreáliskola 10 kor., Szabadkai közs. főgymn. 10 kor., ... 30 kor.

1908. évre: Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymnasium 10 kor., Beregszászi állami főgimnasium 10 kor., Brassói r. kath. főgymnasium 10 kor., Budapesti Egyet. könyvtár 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főgymnasium 10 kor., Budapesti VI. k. áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti VIII. k. áll. főgymnásium 10 kor., Budapesti X. k. áll. főgymnasium 10 kor., Csiksomlyói r. kath. főgymnasium 10 kor., Deési áll. főgymnasium 10 kor., Egri áll. főreáliskola 6 kor., Eötvös Kollegium 10 kor., Érsekujvári közs. kath. főgymnasium 10 kor., Fogarasi áll. főgymn. 10 kor., Győri áll. főreálisk. 10 kor., Győri polg. fiuisk. 10 kor., Gyulai r. kath. főgymn. 10 kor., Gyulafehérvári r. kath. főgymn. 10 kor., Hajdúnánási ev. ref. főgymn. 6 kor., Hepke Bertalan 10 kor., Jászberényi kir. kath. főgymn. 10 kor., Kaposvári áll. főgymn. 10 kor., Karczagi ev. ref. főgymn. 10 kor., Kisujszállási ev. ref. főgymn. 10 kor., Körmöczbányai áll. főreálisk. 10 kor., Makói áll. főgymn. 10 kor. Mármarosszigeti ev. ref. főgymn. 10 kor. Marosvásárhelyi róm. kath. főgymn. 10 kor., Nagyenyedi Bethlen főiskola 10 kor., Nagyszebeni főgymn. 6 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 5 kor., Nyitrai felsőbb leányiskola 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 6 kor., Privigyei kegy. rendi gymn. 10 kor., Pozsonyi áll. főreáliskola 10 kor., Sepsi-szt-gyögyi ev. ref. főgymn. 10 kor., Soproni ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 6 kor., Szakolczai főgymn. 10 kor., Szamosujvári áll. főgymn. 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgymn. 10 kor., Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium 6 kor. Szegzárdi állami főgymn. 10 kor., Székelyudvarhelyi ref. főgymn. 10 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Székesfehérvári felső leányiskola 10 kor., Szentesi főgymn. 10 kor., Temesvári áll. főgymn. 10 kor., Temesvári áll. főreáliskola 10 kor., Temesvári felső keresk. iskola 10 kor., Trencséni felső leányiskola 10 kor., Ungvári áll. főreáliskola 10 kor., Ungvári kir. kath. főgymn. 10 kor., Urbán József 10 kor., Zilahi ev. ref. főgymn. 6 kor., Összesen ... ... 527 kor.

Összesen befolyt:

		jan. 1-től:
Hátralékokból	268 kor.	268 kor
F. és köv. évi tagsági díjakból	566 «	566 «
Előfizetési díjakból	557 «	557 «

Kelt Budapesten, 1908 jun. 1-én.

Feichtinger Győző.

Vetitőkészülék «Calderoni I. A.»

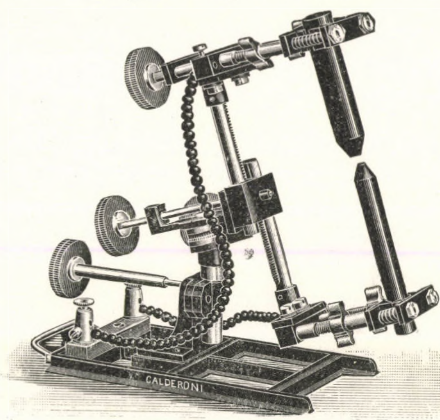
Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva.— Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 340, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

Villamos ívlámpa

legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével mindenirányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5–50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—



Villamos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ara teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **90.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **27.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falraerősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	280	300	320	360	400	480 cm. négyzetben
Ára	**45.**—	**65.**-	**75.**—	**90.**—	**98.**—	**145.**—	**195.**—	**240.**— korona.

Calderoni és Társa, Budapest, IV., Kis hid-utcza 8. szám.

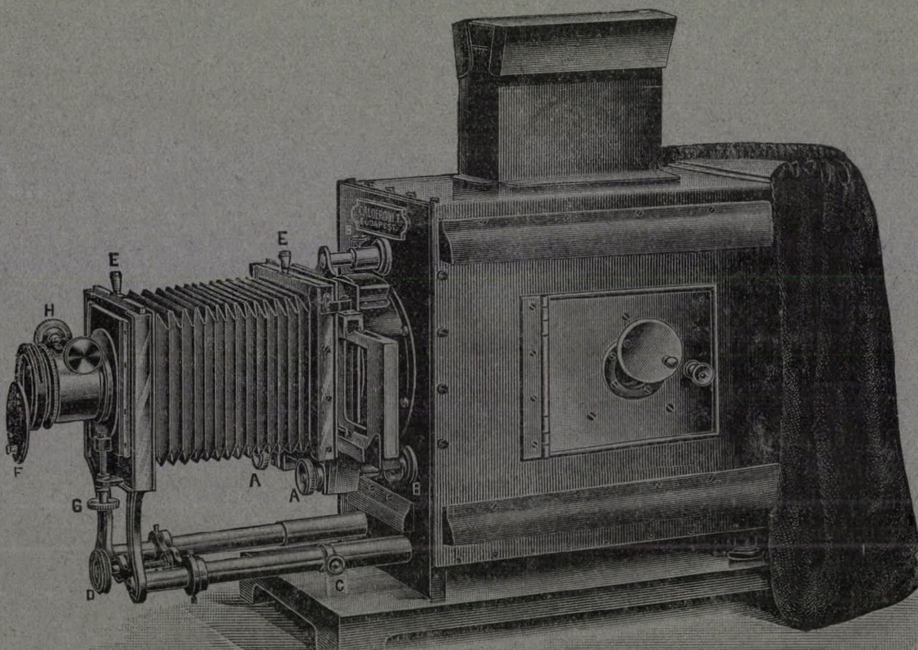
Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönnyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K 260.—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENHETEDIK ÉVFOLYAM

VIII. FÜZET 1908 DECZEMBER.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1908.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A tizenhetedik társulati év 1908 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona) az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéséért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két—két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX. Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☛ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

EGY EGYENLŐTLENSÉGRŐL.

KŐNIG GYULA úr «*A gammafüggvények elemi tárgyalása*» cz. értekezésében (Math. és Phys. Lapok, I. köt., 5—16. lap) a

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-z} z^{u-1}\, dz$$

integrál kiszámítását oly határátmenetre alapította, melynek lehetőségét a

$$0 \leqq e^{-nx} - (1-x)^n < \frac{1}{n} \tag{I}$$

$$(0 \leqq x \leqq 1,\ n \text{ pos. eg. szám})$$

egyenlőtlenség segítségével bizonyította be. Czéljaira azonban már a

$$0 \leqq e^{-nx} - (1-x)^n < \frac{e}{n} \tag{II}$$

$$(0 \leqq x \leqq 1,\ n \text{ pos. eg. szám})$$

egyenlőtlenség is elegendő lévén, nem tartom fölöslegesnek az utóbbi egyenlőtlenségnek egyszerű bebizonyítását közölni.

Véges MACLAURIN-sorba fejtve

$$e^{-x} = 1 - x + e^{-\vartheta x}\frac{x^2}{2}, \tag{1}$$

hol ϑ positiv valódi tört. Innen

$$e^{-x} \geqq 1 - x,$$

tehát $0 \leqq x \leqq 1$ esetében valóban

$$e^{-nx} \geqq (1-x)^n. \tag{2}$$

Áttérve a (II.) alatti egyenlőtlenség második részére, az (1) alatti egyenleten kívül vegyük még tekintetbe, hogy az n minden positiv egész számú értékénél

$$(a+b)^n \geqq a^n + na^{n-1}b, \tag{3}$$

ha

$$a \geqq 0, \quad (a+b) \geqq 0.$$

Az (1) alatti egyenlet így is írható:

$$e^{-x}\left(1 - \frac{x^2}{2}e^{(1-\vartheta)x}\right) = 1 - x. \tag{4}$$

Itt a $0 \leqq x \leqq 1$ esetben a jobb oldal positiv értékű, esetleg 0; tehát a bal oldalon is

$$1 - \frac{x^2}{2}e^{(1-\vartheta)x} \geqq 0.$$

Szabad tehát a (3) alatt az

$$a = 1, \quad b = \frac{x^2}{2}e^{(1-\vartheta)x}$$

helyettesítést elvégeznünk. Leszen:

$$\left(1 - \frac{x^2}{2}e^{(1-\vartheta)x}\right)^n > 1 - \frac{n}{2}x^2 e^{(1-\vartheta)x}$$

és még inkább

$$\left(1 - \frac{x^2}{2}e^{(1-\vartheta)x}\right)^n > 1 - \frac{n}{2}ex^2. \tag{5}$$

Ha most már a (4) alatti egyenlet mindkét oldalát az n-dik hatványra emeljük és tekintetbe veszszük az imént nyert egyenlőtlenséget, akkor

$$e^{-nx}\left(1 - \frac{n}{2}ex^2\right) < (1-x)^n,$$

vagyis

$$e^{-nx} - (1-x)^n < \frac{n}{2}ex^2e^{-nx}.$$

Írjunk a jobb oldalon nx helyébe z-t; akkor

$$e^{-nx}-(1-x)^n < \frac{e}{2n} e^{-z} z^2. \tag{6}$$

Itt z positiv szám, tehát az

$$e^z = 1+z+e^{\vartheta z}\frac{z^2}{2}$$

képletből

$$e^z > \frac{z^2}{2},$$

vagyis

$$e^{-z}z^2 < 2.$$

Ezt (6) alatt tekintetbe vévén, valóban

$$e^{-nx}-(1-x)^n < \frac{e}{n}\cdot \tag{7}$$

Tárgyalásomban szándékosan nem hivatkoztam arra a könnyen igazolható tényre, hogy a legnagyobb érték, melyet

$$e^{-z}z^2$$

a z positiv értékeire nézve felvesz, a $z=2$ helynek megfelelő $4e^{-2}$.

Kürschák József.

AZ ALGEBRAI EGYENLET LEGKISEBB ABSZOLUT ÉRTÉKŰ GYÖKÉRŐL.

Bevezetés.

LANDAU «Über den Picardschen Satz»[1] czímű dolgozatában a következő tételt bizonyitotta be:

Minden

$$a_0+a_1x+a_nx^n=0,$$
$$a_1\neq 0,\quad n\geqq 2,$$

háromtagú (trinomikus) algebrai egyenletnek van legalább is egy gyöke az

$$|x|\leqq\rho(a_0,\ a_1)$$

körben, melynek sugara n-től és a_n-től független.

A $\rho(a_0,\ a_1)$ számára a $2\left|\dfrac{a_0}{a_1}\right|$ értéket találja.

Ugyanezen értekezésben LANDAU még a következő tételt állítja fel:

Minden

$$a_0+a_1x+a_mx^m+a_nx^n=0,$$
$$a_1\neq 0,\quad 2\leqq m<n,$$

négytagú (quadrinomikus) algebrai egyenletnek van legalább is egy gyöke az

$$|x|\leqq\sigma(a_0,\ a_1)$$

körben, melynek sugara m, n, a_m, a_n-től független.

A $\sigma(a_0,\ a_1)$ számára a $8\left|\dfrac{a_0}{a_1}\right|$ értéket találja.

---

[1] Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 51, 1906, S. 252—318. Itt csak § 16 jön tekintetbe.

Később megjelent «Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard»[1] czímű dolgozatában LANDAU e tárgygyal tovább foglalkozik. A trinomikus egyenletre vonatkozó tételének itt egy új, HURWITZtól eredő, bizonyitását közli és a quadrinomikus egyenletre vonatkozó $8\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$ sugárértéket sikerül neki a $\beta\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$ értékre leszorítani, hol β az 5 és 6 között lévő abszolut állandó. Végre LANDAU a kérdéseknek egy egész sorozatát veti föl, melyek közül a következőt emeljük ki:

Érvényes-e egy általános tétel az $(r+1)$-tagú

$$a_0+a_1x+a_2x^{n_2}+a_3x^{n_3}+\cdots+a_rx^{n_r}=0,$$
$$(1<n_2<n_3<\cdots<n_r),$$

algebrai egyenletre vonatkozólag, mely az előbbi, a három és négytagú egyenletre vonatkozó, tételeknek megfelel?

Erre a kérdésre a következő sorokban fogok megfelelni.

1. §. Az általános $(k+1)$-tagú algebrai egyenlet legkisebbgyökére vonatkozó tételek. Egy megjegyzés.

Legyen $\Sigma c_sx^s=0$ egy algebrai egyenlet, melynek baloldala az x növekedő hatványai szerint van rendezve. c_sx^s-et nevezzük az egyenlet egy tagjának, c_s-et a tag együtthatójának és s-et a tag kitevőjének. A c_sx^s tagot «föllépő tag»-nak nevezzük, ha $c_s\neq 0$. Most már «$(k+1)$-tagú» egyenletnek nevezünk minden egyenletet, melyben a föllépő tagok száma $\leqq k+1$. Az ilyen egyenletnek általános alakja

$$a_0x^{\nu_0}+a_1x^{\nu_1}+\cdots+a_kx^{\nu_k}=0.$$

Hogy azt a triviális esetet, a midőn $x=0$ gyöke az algebrai egyenletnek, kezdettől fogva kizárjuk, fölteszszük, hogy $\nu_0=0$ és $a_0\neq 0$. Legyen továbbá ν_1 az első, az a_0 után föllépő tagnak a kitevője; más szóval legyen $a_1\neq 0$. Akkor tehát egy

[1] Annales de l'École Normale supérieure, tome XXIV, 1907, p. 179—201.

$$a_0+a_1x^{\nu_1}+a_2x^{\nu_2}+\cdots+a_kx^{\nu_k}=0 \tag{1}$$

alakú egyenletet vizsgálunk, melyben

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$$

pozitiv egész számokat jelentenek, melyekre nézve

$$0<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k$$

és

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k,$$

pedig tetszőleges komplex számokat jelentenek, melyek közül az első kettő a zérustól különböző. Ilyen algebrai egyenletre vonatkozólag érvényesek a következő tételek:

I. tétel. *Az* (1) *alatti egyenletnek legalább is egy gyöke van az*

$$|x|\leq\left(\frac{\nu_2\nu_3\ldots\nu_k}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)\ldots(\nu_k-\nu_1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}\cdot\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}} \tag{A}$$

körben.[1] *E kör sugara a*

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, a_0, a_1$$

értékektől függ, míg az

$$a_2, a_3, \ldots, a_k$$

értékektől független.

II. tétel. *Az* (1) *alatti egyenletnek legalább is egy gyöke van az*

$$|x|\leq\left(\frac{(\nu_1+1)(\nu_1+2)\ldots(\nu_1+k-1)}{1.2\ldots(k-1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}\cdot\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}} \tag{B}$$

körben. E kör sugara a

$$\nu_1, k, a_0, a_1$$

értékektől függ, míg a

$$\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_k,$$

$$a_2, a_3, \ldots, a_k$$

értékektől független.

---

[1] A $\nu_1=1$ esetre e formula már ALLERDICE egy czikkében található. Lásd Bulletin of the American Math. Soc., Vol. XIII, June 1907.

III. tétel. *Az (1) alatti egyenletnek legalább is egy gyöke van az*

$$|x| \leqq k \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}} \tag{C}$$

körben, melynek sugara ugyanazon adatoktól függ mint az előbbi köré.

IV. tétel. *Az (1) alatti egyenletnek legalább is egy gyöke van az*

$$|x| \leqq k \cdot \left\{ \left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 1 \right\} \tag{D}$$

körben, a hol általánosan $\{\alpha, \beta\}$ *az* α, β *pozitiv számok közül azt jelenti, mely nem kisebb a másiknál. A kör sugara függ a*

$$k,\ a_0,\ a_1$$

értékektől, míg a

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k,$$

$$a_2, \ldots, a_k$$

értékektől független.

Más szóval: ha valamely az x növekedő hatványai szerint rendezett algebrai egyenletre vonatkozólag ismerjük az első két föllépő tag együtthatóját (a nélkül, hogy e tagoknak kitevőit ismernők), akkor megadhatunk egy kört, melynek középpontja a kezdőpont és melynek belsejében vagy kerületén ezen algebrai egyenletnek legalább is egy gyöke fekszik. E körnek sugara az a_0, a_1 együtthatókon kívül csakis a *tagszám*ot jellemző k számtól függ (és így többek között az egyenlet *fokszám*ától független).

A IV. tétel jó fölfogása érdekében talán a következőket jegyezhetem meg. Nagyon könnyű belátni, hogy létezik egy olyan R sugár, mely az első két föllépő tag a_0, a_1 együtthatóin kivül csakis n-től, az egyenlet *fokszám*ától függ, úgy hogy az $|x| \leqq R$ körben az algebrai egyenletnek legalább is egy gyöke foglaltatik. Jelöljék ugyanis

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

az x növekedő hatványai szerint rendezett

$$a_0+a_1x^p+\cdots+a_lx^n=0,$$
$$(a_0\neq 0,\ a_1\neq 0,\ a_l\neq 0)$$

algebrai egyenletnek összes gyökeit. Akkor

$$x_1x_2\ldots x_n=\pm\frac{a_0}{a_l},$$

$$x_1x_2\ldots x_{n-p}+\cdots=\pm\frac{a_1}{a_l}.$$

Osztással nyerjük

$$\frac{1}{x_{n-p+1}\ldots x_n}+\cdots=\pm\frac{a_1}{a_0},$$

hol az egyenlet baloldalán $\binom{n}{p}$ számú tag összege áll. Ha most x_1 jelenti az egyenlet azon gyökét, melynek abszolut értéke nem nagyobb a többi gyökök abszolut értékénél, akkor, tekintve hogy

$$\left|\frac{1}{x_{n-p+1}\ldots x_n}\right|+\cdots\geqq\left|\frac{a_1}{a_0}\right|,$$

nyerjük

$$\binom{n}{p}\cdot\frac{1}{|x_1|^p}\geqq\left|\frac{a_1}{a_0}\right|,$$

vagy[1]

$$|x_1|\leqq\binom{n}{p}^{\frac{1}{p}}\cdot\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{p}}.$$

Ámde

$$\binom{n}{p}^{\frac{1}{p}}\leqq n,$$

$$\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{p}}\leqq\left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|,\ 1\right\},$$
$$(p=1,2,\ldots,(n-1))$$

tehát

$$R=n\left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|,\ 1\right\}$$

a keresett sugár.

---

[1] $p=1$-re ezen egyenlőtlenséget LANDAU előbb idézett zürichi értekezésében találhatjuk. Lásd 316. oldal.

A IV. tételben adott

$$\rho = k\left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 1\right\}$$

formulának előnye az R-re adott formulával szemben abban áll, hogy itt az n fokszám helyett a nála általában kisebb k szám áll tényező gyanánt.[1]

2. §. A Gauss-féle tétel. Az 1. §. tételeinek bizonyítása.

Az I. tételt egy általános, magában is rendkívül érdekes tétel segítségével bizonyítom be. Talán GAUSS-féle tételnek nevezhetem a szóban forgó általános algebrai tételt. Nagy irodalma van ennek és még sem sikerült megtalálnom egyetlen algebrai kézikönyvben sem.

Legyenek

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

egy tetszőleges

$$f(z) = 0$$

algebrai egyenletnek egymástól különböző gyökei és jelöljék rendre

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

ezen gyökök multipliczitását. Képzeljünk a z sík $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontjaiba tömegeket konczentrálva, melyeknek nagysága rendre $a_1, a_2, \ldots, a_n$-nel egyenlő és a melyek a távolsággal fordított arányban lévő vonzó erőt fejtenek ki. Legyen z' a

$$\frac{df(z)}{dz} \equiv f'(z) = 0$$

derivált egyenletnek egy tetszőleges, a $z_1, \ldots, z_n$ értékektől különböző gyöke. Akkor — és ebben áll a GAUSS-féle tétel — egy *a z' pontba konczentrált tömeg az előbb említett erők simultan hatása alatt egyensúlyban marad.*[2]

---

[1] Egy n-edfokú egyenlet legfeljebb $(n+1)$ tagú. Tehát $k \leq n$.

[2] E tételre J. O. MÜLLER úr volt szíves fölhívni figyelmemet. STÄCKEL úrnak köszönöm azt a figyelmeztetést, hogy a szóban forgó tétel GAUSS

E tétel a derivált gyökeinek egy *mechanikai* interpretáczióját adja.

Lehet őket mint a $z_1, z_2, \dots, z_n$ pontokba konczentrált pozitiv tömegeknek *tömegczentrumát* is interpretálni. Ezt egy, e tárgyról irt Comptes-Rendus czikkemben közöltem. (C. R. tome 145, 1907, 26 août.)

Ugyanis, mint ismeretes

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_2}{z-z_2} + \dots + \frac{a_n}{z-z_n}$$

minden z értékre nézve. Jelentse z' az $f'(z) = 0$ egyenletnek egy tetszőleges, a $z_1, z_2, \dots, z_n$-től különböző gyökét. Akkor

$$\frac{a_1}{z'-z_1} + \frac{a_2}{z'-z_2} + \dots + \frac{a_n}{z'-z_n} = 0.$$

Legyen

$$z_r = a_r + ib_r \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

és

$$z' = \xi + \eta i,$$

akkor

$$\frac{a_1}{(\xi-a_1)+i(\eta-b_1)} + \frac{a_2}{(\xi-a_2)+i(\eta-b_2)} + \dots + \frac{a_n}{(\xi-a_n)+i(\eta-b_n)} = 0,$$

vagy

$$\frac{a_1(\xi-a_1)-ia_1(\eta-b_2)}{(\xi-a_1)^2+(\eta-b_1)^2} + \dots = 0.$$

Tehát, ha röviden

---

hagyatékában megtaláltatott. A Gauss-féle tételre vonatkozó czikkek közül, melyeknek egy, bizonyára még mindig nem teljes, jegyzékét birom, csak a következőket említem:

Gauss, Werke, 3-ter Band, 1866, S. 112.

Ch. F. Lucas, Comptes Rendus, 1868 (2-ième semestre), 1888, (1-ier semestre).

Gauss, Werke, 8-ter Band, 1900, S. 32.

P. J. Heawood, Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$. Quaterly Journal of Math., Vol. XXXVIII, No. 1, 1906, No. 2, 1907.

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, I. Band, 1907, S. 176.

$$(\xi-a_r)^2+(\eta-b_r)^2=|z'-z_r|^2=\rho_r^2.$$
$$(r=1,2,\ldots,n)$$

akkor

$$\xi=\frac{\frac{\alpha_1}{\rho_1^2}a_1+\frac{\alpha_2}{\rho_2^2}a_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{\rho_n^2}a_n}{\frac{\alpha_1}{\rho_1^2}+\frac{\alpha_2}{\rho_2^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\rho_n^2}}$$

és

$$\eta=\frac{\frac{\alpha_1}{\rho_1^2}b_1+\frac{\alpha_2}{\rho_2^2}b_2+\cdots+\frac{\alpha_n}{\rho_n^2}b_n}{\frac{\alpha_1}{\rho_1^2}+\frac{\alpha_2}{\rho_2^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{\rho_n^2}}.$$

Ezen utóbbi két egyenlet már mutatja, hogy a z' valóban *a* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *pontokba konczentrált pozitiv tömegek tömegczentruma gyanánt fogható fel.*

Megemlitem e helyen az $f'(z)=0$ egyenlet gyökeinek egy harmadik és pedig *geometriai* interpretáczióját. Ezt úgy látszik F. J. VAN DEN BERG [Nieuw Archief voor Wiskunde: 1882, 1884 és különösen 1888] közölte először. Később HEAWOOD (és mások) újra fölfedezték. A geometriai interpretáczió abban áll, hogy a $z_1, z_2, \ldots, z_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adatok segitségével egy algebrai görbét jellemeznek, melynek a z' pontok a különböző fokusai. A tételt csak az

$$n=3, \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$$

esetre idézem.

Ekkor egy

$$f(z)=0$$

harmadfokú egyenletről van szó, melynek három egymástól különböző és egyszerű

$$z_1, z_2, z_3$$

gyöke van. Tekintsük a z_1, z_2, z_3 pontok által alkotott háromszöget. Felezzük meg a háromszög három oldalát és tekintsük azt az ellypsist, mely a háromszög oldalait az oldalfelező pontokban érinti. Ezen beirt ellypsis két fokusa adja az $f'(z)=0$ négyzetes egyenlet két gyökét.[1]

[1] L. még E. CESARO: Relazioni fra le radici dell' equazione cubica e quelle della sua derivata, Periodico di Mat. 1900.

Legyen most már

$$f(z)=0$$

egy tetszőleges algebrai egyenlet és jelöljék $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ennek egymástól különböző gyökeit. Alkossuk meg azt a legkisebb konvex, egyenesvonalú polygont, melyet ezen gyökpontok köré feszíteni lehet. Akkor a GAUSS-féle tételből tüstént következik, hogy az

$$f'(z)=0$$

egyenlet összes gyökei ezen polygon belsejébe vagy annak kerületére esnek. Ez a ROLLE-féle tételnek egy nevezetes általánositása tetszőleges komplex polynomokra.

E tételnek egy fontos *korolláriumát* akarom kiemelni:

Az $f'(z)=0$ egyenlet legnagyobb gyöke kisebb mint az $f(z)=0$ egyenlet legnagyobb gyöke, vagy legfeljebb vele egyenlő. E mellett mindig a szóban forgó gyökök abszolut értékére gondolunk.

A következőkben a GAUSS-féle tételnek e korolláriumát fogom fölhasználni.

Lássuk most már az I. tétel bizonyitását. Legyen egyszerűség kedvéért $k=3$. Feladatunk az

$$a_0+a_1x^{\nu_1}+a_2x^{\nu_2}+a_3x^{\nu_3}=0, \tag{1}$$
$$a_0 \neq 0, \quad a_i \neq 0$$

egyenlet legkisebb gyökének az abszolut értéke számára egy *felső* határt szabni meg.

Ha az (1) alatti egyenletbe

$$x=\frac{1}{z}$$

helyettesitünk és mindkét oldalt z^{ν_3}-nal megszorozzuk, úgy az (1) alatti egyenlethez tartozó

$$a_0z^{\nu_3}+a_1z^{\nu_3-\nu_1}+a_2z^{\nu_3-\nu_2}+a_3=0 \tag{2}$$

reciprok egyenletet nyerjük. Feladatunk most ezen egyenlet legnagyobb gyökének az abszolut értéke számára egy *alsó* határt szabni meg.

Képezzük e végből a (2) alatti egyenlet derivált egyenletét:

$$\nu_3 a_0 z^{\nu_3-1} + (\nu_3-\nu_1)\, a_1 z^{\nu_3-\nu_1-1} + (\nu_3-\nu_2)\, a_2 z^{\nu_3-\nu_2-1} = 0. \qquad (3)$$

Ezen egyenlet legnagyobb gyökének abszolut értéke, korollariumom értelmében, bizonyára kisebb (vagy legalább is nem nagyobb) mint a (2) alatti egyenlet legnagyobb gyökének abszolut értéke.

A 0 a (3) alatti egyenletnek általában gyöke. Bizonyára nem legnagyobb gyöke. Ha tehát

$$z^{\nu_3-\nu_2-1}\text{-gyel}$$

a (3) alatti egyenlet mindkét oldalát elosztom, nyerem a

$$\nu_3 a_0 z^{\nu_2} + (\nu_3-\nu_1)\, a_1 z^{\nu_2-\nu_1} + (\nu_3-\nu_2)\, a_2 = 0$$

egyenletet, a melynek a legnagyobb gyökét kell most vizsgálnunk. Erre redukáltuk feladatunkat.

Most az eljárást ismételjük. Deriváljuk az utóbbi egyenletet és oszszunk utána a $z^{\nu_2-\nu_1-1}$ hatványnyal. Nyerjük a

$$\nu_2\nu_3 a_0 z^{\nu_1} + (\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)\, a_1 = 0$$

egyenletet.

Ezen egyenletet megoldva tüstént kapjuk, hogy a (2) alatti egyenletnek mindenesetre van egy olyan gyöke, melynek abszolut értéke

$$\geqq \left(\frac{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)}{\nu_2 \cdot \nu_3}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_1}{a_0}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}.$$

E szerint végre, az (1) alatti egyenletnek van olyan gyöke, mely abszolut értékre nézve

$$\leqq \left(\frac{\nu_2 \cdot \nu_3}{(\nu_2-\nu_1)(\nu_3-\nu_1)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}.$$

Ezzel az I. tételt egész általánosságban kimutattam. Világos ugyanis, hogy a $k = 3$ föltevés teljesen lényegtelen. A redukcziós eljárás kellő számú ismétlése által tetszőleges k esetében is czélhoz jutunk és nyerjük az (A) alatti egyenlőtlenséget.

Az I. tételből könnyen következik a II. tétel.

Ugyanis, minthogy

$$\nu_2 \geqq \nu_1 + 1,$$

tehát

$$\frac{\nu_2}{\nu_2 - \nu_1} \leqq \frac{\nu_1 + 1}{1}.$$

Minthogy továbbá

$$\nu_3 \geqq \nu_1 + 2,$$

tehát

$$\frac{\nu_3}{\nu_3 - \nu_1} \leqq \frac{\nu_1 + 2}{2}$$

stb. Végre

$$\frac{\nu_k}{\nu_k - \nu_1} \leqq \frac{\nu_1 + k - 1}{k - 1}.$$

Ezen egyenlőtlenségeket összeszorozva nyerjük

$$\frac{\nu_2 \nu_3 \ldots \nu_k}{(\nu_2 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_1) \ldots (\nu_k - \nu_1)} \leqq \frac{(\nu_1 + 1)(\nu_1 + 2) \ldots (\nu_1 + k - 1)}{1 \cdot 2 \ldots (k-1)},$$

mely egyenlőtlenség tekintetbe vételével az (A) alatti egyenlőtlenségből közvetlenül a (B) alattit kaphatjuk meg.

A (B) alatti sugár értéke különösen egyszerű azon esetben, a midőn $\nu_1 = 1$. Erre az esetre a II. tétel a következőképen hangzik:

Minden

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^{\nu_2} + \cdots + a_k x^{\nu_k} = 0 \tag{4}$$
$$(a_1 \neq 0,$$

alaku, $(k+1)$-tagú algebrai egyenletnek legalább is egy gyöke van az

$$|x| \leqq k \cdot \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

kör belsejében, vagy annak kerületén.

Itt a k állandó nem helyettesithető egy kisebb állandóval. Ugyanis az

$$a_0 \left(1 + \frac{a_1 x}{k a_0}\right)^k = a_0 + a_1 x + \cdots = 0 \tag{5}$$

$k+1$)-tagú algebrai egyenletnek nem az $|x| \leqq k \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$ kör belsejében, hanem annak kerületén van (az egyébként egyetlen) gyöke.

Értelmezzük kissé ezt az eredményt. Legyen n a (4) alatti egyenlet fokszáma. Akkor ennek, mint láttuk, az

$$|x| \leqq n \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

körben (vagy annak kerületén) mindenesetre van egy gyöke. Nekünk most már sikerült az egyenlőtlenség jobb oldalán álló n tényezőt k-ra leszorítanunk, vagyis az

$$|x| \leqq k \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

körre nézve kimutatnunk azt, hogy vagy belsejében, vagy kerületén legalább is egy gyökét tartalmazza a (4) alatti egyenletnek. *Kisebb* kört azonban *általánosságban* már nem lehet kijelölni, mely szükségképen gyököt tartalmaz. Más szóval a k állandó értékét már nem lehet lejebb szorítani; *k a «helyes» numerikus tényező a szóban forgó egyenlőtlenségben.*

Tételem tehát ráutal arra, hogy adva lévén a_0, a_1, a legkisebb gyök absolut értékének felső határa *lényegesen* függ össze az egyenlet tagszámát jellemző k számmal. *Ezzel* függ össze és nem a nála általában nagyobb és így a legkisebb gyök számára kevésbbé jó körtartományt szolgáltató n fokszámmal.

Legyen $k=2$. Akkor a (4) alatti egyenlet trinomikus:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^{\nu_2} = 0$$
$$(a_1 \neq 0).$$

A legkisebb gyök «helyes» tartománya tehát az

$$|x| \leqq 2 \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

kör. Ezt már LANDAU is bebizonyította.

Legyen $k=3$. Akkor a (4) alatti egyenlet quadrinomikus.

$$a_0+a_1x+a_2x^{\nu_2}+a_3x^{\nu_3}=0$$
$$(a_1\neq 0).$$

A legkisebb gyök «helyes» tartománya tehát az

$$|x|\leqq 3\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

kör.

$\bar{x}$-sal jelölvén a fenti quadrinomikus egyenletnek legkisebb abs. értékű gyökét, LANDAU zürichi értekezésében csak az

$$|\bar{x}|\leqq 8\left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

egyenlőtlenséget tudja kimutatni. HURWITZ levélben jelzi LANDAU-nak, hogy

$$|\bar{x}|\leqq 6\left|\frac{a_0}{a_1}\right|.$$

Végre LANDAU kimutatja párisi értekezésében, hogy

$$|\bar{x}|\leqq \beta\left|\frac{a_0}{a_1}\right|,$$

hol β az

$$\frac{1+2t^2+t^6}{t(1-t)}$$

függvény minimumát jelöli a

$$0<t<1$$

intervallumban. E β érték kisebb ugyan a 6-nál, de nagyobb mint 5. Mi egyszerűen kimutattuk, hogy

$$|\bar{x}|\leqq 3\left|\frac{a_0}{a_1}\right|,$$

hol 3 a «helyes» állandó, melyet kisebbíteni már nem lehet.

Az

$$a_0+a_1x+a_2x^{\nu_2}+a_3x^{\nu_3}+a_4x^{\nu_4}=0$$
$$a_1\neq 0$$

öttagú egyenletre nézve

$$|x| \leqq 4 \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

a helyes tartomány a legkisebb gyök számára stb.

Térjünk át a III. tétel bizonyitására. A II. tétel szerint az (1) alatti egyenletnek szükségképen van gyöke az

$$|x| \leqq \left(\frac{(\nu_1+1)(\nu_1+2)\ldots(\nu_1+k-1)}{1.2\ldots(k-1)} \right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left| \frac{a_0}{a_1} \right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

körben. Tekintsük most a

$$\varphi(t) = \left(\frac{(t+1)(t+2)\ldots(t+k-1)}{1.2\ldots(k-1)} \right)^{\frac{1}{t}}$$

függvényt. Ez a $t=1$ helyen a k értéket veszi fel. Ha t a $t=1$ helytől monoton a $+\infty$-be nő, akkor $\varphi(t)$ monoton fogy és $t=+\infty$-re 1-hez konvergál. Minthogy pedig $\nu_1 \geqq 1$, tehát

$$\left(\frac{(\nu_1+1)(\nu_1+2)\ldots(\nu_1+k-1)}{1.2\ldots(k-1)} \right)^{\frac{1}{\nu_1}} \leqq k.$$

E szerint az (1) alatti egyenletnek van gyöke az

$$|x| \leqq k \left| \frac{a_0}{a_1} \right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

tartományban, a mivel *a III. tétel be van bizonyítva.*

A IV. tétellel is röviden végezhetünk. Két esetet különböztetünk meg.

Első eset: $\left| \frac{a_0}{a_1} \right| \geqq 1.$

Ekkor

$$\left| \frac{a_0}{a_1} \right|^{\frac{1}{\nu_1}} \leqq \left| \frac{a_0}{a_1} \right|,$$

úgy hogy megint az

$$|x| \leqq k \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$$

körtartományhoz jutunk.

Második eset: $\left|\frac{a_0}{a_1}\right| < 1.$

Ekkor

$$\left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}} < 1,$$

és így

$$|x| < k$$

a keresett tartomány.

Mindkét esetben

$$|x| \leq k \left\{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|, 1\right\}$$

egy olyan kör, melyben, vagy melynek kerületén van gyöke az (1) alatti egyenletnek. Ezzel *a IV. tétel is ki van mutatva.*

3. §. Az I. tétel alkalmazása bizonyos hézagos hatványsorokra.

Legyen

$$a_0 + a_1 x^{\nu_1} + a_2 x^{\nu_2} + \cdots + a_k x^{\nu_k} + \cdots \text{ in inf.} \tag{6}$$

$$(a_1 \neq 0)$$

egy x növekedő hatványai szerint haladó hatványsor. Ebben olyan tagok, melyeknek

$$0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$$

-tól különböző kitevőjük volna, ne lépjenek föl. Tekintsük a

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x^{\nu_1} + \cdots + a_k x^{\nu_k}$$

polynomot. Ennek az I. tétel értelmében mindenesetre van zérushelye az

$$|x| \leq \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)\left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_3}\right)\cdots\left(1 - \frac{\nu_1}{\nu_k}\right)}\right)^{\frac{1}{\nu_1}} \cdot \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\nu_1}}$$

kör belsejében vagy kerületén.

Legyenek most már a (6) alatti hatványsor hézagai olyanok, hogy a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$$

végtelen sor konvergens. Akkor, mint ismeretes a

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_k}\right)=g$$

végtelen szorzat is konvergens. E szerint, egy jól ismert HURWITZ-féle lemma[1] alapján nyerjük a következő tételt:

Az

$$a_0+a_1x^{\nu_1}+\cdots+a_kx^{\nu_k}+\cdots$$
$$(a_1 \neq 0)$$

hatványsor mindenesetre eltűnik az

$$|x| \leqq \left(\frac{|a_0|}{g\,|a_1|}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}$$

kör belsejében vagy annak kerületén, föltéve, hogy az

$$\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\cdots+\frac{1}{\nu_k}+\cdots$$

végtelen sor konvergens és hogy a hatványsor a jelzett körtartomány belsejében és annak kerületén konvergens. Itt g jelenti a

$$g=\prod_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{\nu_1}{\nu_k}\right)$$

értéket.

Vegyük például az

$$1+x+a_2x^4+a_3x^9+\cdots+a_nx^{n^2}+\cdots \tag{7}$$

hatványsort.

Itt

$$a_0=a_1=1, \quad \nu_1=1, \quad g=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2},$$

[1] «Über die Nullstellen der BESSELschen Funktion», § 1, Math. Annalen, Bd. 33, 1889.

tehát a (7) *alatti hatványsornak mindenesetre van zérushelye az*

$$|x| \leq 2$$

kör belsejében, vagy annak kerületén, föltéve, hogy ugyanezen tartományban konvergens.

Végre megjegyzem, hogy *egy* (6) *alatti hatványsornak, mely az egész síkban konvergens és a melyre nézve a* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$ *végtelen sor konvergens, nem bír kivételes, u. n. Picard-féle értékkel.*

Legyen ugyanis $f(x)$ egy (6) alatti hatványsor és c egy tetszőleges komplex érték. Akkor

$$f(x) - c$$

is egy a (6) alatti typushoz tartozó hatványsor. E szerint az

$$|x| \leq \left(\frac{|a_0 - c|}{g\,|a_1|} \right)^{\frac{1}{\nu_1}}$$

körben az $f(x)$ függvény a c értéket legalább is egyszer fölveszi.[1]

Fejér Lipót.

---

[1] E paragrafus tétele ama tételek kategoriájához tartozik, melyeket LANDAU és HURWITZ egy olyan hatványsorra nézve állítottak föl, melynek

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$$

kitevői egy olyan arithmetikai haladványt alkotnak, melynek 1-től különböző differencziája nem osztója a ν_1 első tagnak.

EGY MEGJEGYZÉS A FOURIER-FÉLE SORFEJTÉSHEZ.

RIEMANN az ő habilitatiós dolgozatában a FOURIER-féle sorok alaptételének a bebizonyitását adja, mely szerint a $(0 \ldots 2\pi)$ intervallumban egyértékű véges és folytonos $f(x)$ függvény által teljesen meghatározott

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a)\,da + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \cos n(a-x)\,da \right]$$

FOURIER-féle sorfejtésben az általános tag határértéke:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \cos n(a-x)\,da = 0. \tag{1}$$

Nem áll fenn szükségkép az (1) alatti egyenlőség, ha $f(x)$ a $(0 \ldots 2\pi)$ intervallumnak pl. az $x = 2\pi$ pontjában végtelen sok maximummal és minimummal válik tetszés szerinti módon végtelenné, de úgy, hogy emellett integrábilis marad; mert — mint RIEMANN ugyancsak az ő habilitatiós dolgozatában egy példán kimutatja — az

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \cos n(a-x)\,da$$

integrál abszolut értéke egy előbb jellemzett $f(x)$ függvényre nézve tetszőleges nagy is lehet.

Minden megszorítás nélkül áll azonban FEJÉRnek «Vizsgálatok a Fourier-féle sorok köréből» czímű dolgozatában közölt tétele, mely szerint

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(a) \cos n\,(a-x)\, da = 0, \tag{2}$$

ha csak $f(a)$ integrábilis a $(0 \ldots 2\pi)$ intervallumban. Ez a tétel az (1) alatti RIEMANN-féle tétel általánosításának tekinthető.

Legyen $f(x)$ a $(0 \ldots 2\pi)$ intervallumban *véges* és *integrálható* függvény, a mely az x helyen folytonos, akkor az $f(x)$-szel teljesen meghatározott

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a)\, da + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a) \cos n\,(a-x)\, da \right]$$

FOURIER-féle sor:

$$s_0(x),\ s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$$

részletösszegeiből képezett:

$$s_0(x), \ldots \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}, \ldots$$

arithmetikai közepek határértéke létezik és egyenlő $f(x)$-szel. Ez FEJÉR tétele.

Azonban mint FEJÉR ugyanabban az értekezésében kimutatja, e tétel fennáll akkor is, ha $f(x)$ a fentjellemzett módon az intervallum végén tetszés szerinti módon válik végtelenné.

E nevezetes körülmény megállapításakor éppen a (2) alatti tételre van szükség s éppen ebben áll e tétel fontossága.

Az idézett dolgozatban a (2) alatti egyenlőség a nagyobb részletezést igénylő második középértéktétel felhasználásával van bizonyítva.

Azonban egy csapásra kiderül a (2) alatti állítás helyessége, ha egy bizonyos parcziális integrálást alkalmazunk. Ennek segítségével ugyanis tüstént az (1) alatti RIEMANN-féle tételre vezetjük vissza a (2) alatti tételt. Ezt fogjuk a következő sorokban megmutatni.

Tegyük föl, hogy $f(x)$ a $(0 \ldots 2\pi)$ intervallum minden helyén folytonos, kivéve bizonyos véges számban levő helyeken, a melyeken integrálhatóan végtelenné válik.

Egyszerűség kedvéért föltehetjük, hogy a $(0\dots 2\pi)$ intervallumnak csak egy helyén válik végtelenné és e hely a 2π hely legyen.

E szerint most felteszszük, hogy $f(x)$ a

$$0 \leq x < 2\pi$$

értékekre nézve folytonos, míg a 2π helyen tetszés szerinti módon, integrálhatólag végtelenné válik.

Tekintsük most az

$$\psi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

függvényt.

E $\psi(x)$ a föltevés értelmében a

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

értékekre nézve folytonos, minden

$$0 \leq x < 2\pi$$

értékre nézve differencziálható és a differencziálhányadosa egyenlő $f(x)$-szel.

Tekintsük most már az

$$\int_0^{2\pi} f(a) \cos n\,(a - x)\,dx \tag{3}$$

integrált. Parcziális integrálást alkalmazva nyerjük, hogy

$$\int_0^{2\pi} f(a) \cos n\,(a - x)\,da = [\psi(a) \cos n\,(a - x)]_{a=0}^{a=2\pi} + \\ + n \int_0^{2\pi} \psi(a) \sin n\,(a - x)\,da. \tag{4}$$

E szerint a (3) alatti integrál tanulmányozását visszavezettük az

$$\int_0^{2\pi} \psi(a) \sin n\,(a - x)\,da \tag{5}$$

integrál tanulmányozására.

Ámde itt a $\psi(\alpha)$ a $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ intervallumban véges és folytonos függvény és így az (5) alatti integrál limese $n=\infty$-re az (1) alatti RIEMANN-féle tétel értelmében zérus.

Most már a (4) alatti egyenlőség mindkét oldalát n-nel osztván, kapjuk hogy

$$\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha = \frac{\psi(2\pi)\cos n(2\pi-x)}{n} + \\ + \int_0^{2\pi}\psi(\alpha)\sin n(\alpha-x)\,d\alpha$$

és így valóban

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha-x)\,d\alpha = 0,$$

a mit bizonyítani akartunk.

Ezzel az egyszerű megfontolással a (2) alatti tétel lényegében az (1) alattira van visszavezetve.

Morvay Ferencz.

EGY ISMERETLENT TARTALMAZÓ LINEÁRIS KONGRUENCZIA-RENDSZEREK ÁLTALÁNOS TÁRGYALÁSA.

1. Az

$$x \equiv a_i \pmod{n_i} \qquad (R)$$
$$(i=1, 2, \ldots, r)$$

kongruenczia-rendszer megoldása számelméleti kézikönyvekben csak oly esetekre található,* a midőn a modulusok közül, melyekre a rendszerhez tartozó egyes kongruencziák vonatkoztatva vannak, bármelyik kettő egymáshoz képest *relativ törzsszám.* A jelen dolgozatban a kongruenczia-rendszer megoldhatósága kritériumai és megoldásainak meghatározásával abban az általánosabb esetben kivánok foglalkozni, a midőn e modulusok *tetszésszerinti* egész számok, oly értelemben, hogy *páronkénti legnagyobb közös osztójuk az egységtől különböző is lehet.*

A modulusokra vonatkozó e legáltalánosabb feltevés mellett problémánk pontosabban így fogalmazható: *Meghatározandók az adott* (R) *kongruenczia-rendszer megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételei és — ha e feltételek teljesítve vannak — meghatározandók a kongruenczia-rendszer összes megoldásai.* A mint fejtegetéseink során ki fog derülni, e probléma megoldását a következő tételsorozat foglalja magában:

Az adott (R) *kongruenczia-rendszer megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy az*

$$a_i \equiv a_k \pmod{d_{ik}}$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, r)$$

---

* E körülményre RADOS GUSZTÁV műegyetemi tanár úr volt szíves figyelmeztetni, a kinek felszólítására készült e kis dolgozat. *F. M.*

kongruenczia i és k jelzett összes értékei mellett fennálljon, a hol

$$d_{ik} = (n_i, n_k).\text{[1]}$$

E feltételek teljesülése esetén a kongruenczia-rendszer megoldása:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} N_i y_i^0 a_i \pmod{N},$$

hol

$$N = [n_1, n_2, \ldots, n_r],\text{[2]}$$

$$N_i = \frac{N}{n_i}$$
$$(i=1, 2, \ldots, r)$$

és a hol $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_r^0$ *az*

$$\underset{(i=1, 2, \ldots, r)}{N_i y_i \equiv 1} \left(\mathrm{mod.}\ \frac{n_i}{[d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{ir}]}\right)^{[3]}$$

kongruencziák olyan szimultán gyökrendszere, mely a

$$\sum_{i=1}^{r} N_i y_i^0 = 1$$

relácziónak eleget tesz.

---

[1] $(n_i, n_k) = d_{ik}$ symbolikus egyenlőség azt jelenti, hogy d_{ik} az n_i és n_k számok legnagyobb közös osztója.

[2] $[n_1, n_2, \ldots, n_r]$ symbolum az $n_1, n_2, \ldots, n_r$ számok legkisebb közös többszörösét jelenti.

[3] E kongruenczia modulusa: ν_i így is írható:

$$\nu_i = \frac{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \ldots, n_r]}{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_r]};$$

ugyanis

$$[d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{ir}] =$$
$$= [(n_1, n_i), (n_2, n_i), \ldots, (n_{i-1}, n_i), (n_{i+1}, n_i), \ldots, (n_r, n_i)] =$$
$$= (n_i, [n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_r]),$$

a mi az $[(a, c), (b, c)] = (c, [b, a])$ (f) formulának teljes inductióval könynyen nyerhető általánosítása; de

$$(n_i, [n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_r]) = \frac{n_i \cdot [n_1, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_r]}{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \ldots, n_r]},$$

a miből ν_i fentebbi alakja következik. Az idézett (f) formulát illetőleg lásd a 3. pont idevágó * jegyzetét.

Eme tételsorozatot induktiv úton a következőkép nyerhetni:

2. Legyen először a rendszerhez tartozó kongruencziák száma kettő:

$$x \equiv a_1 \pmod{n_1} \tag{1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{n_2} \tag{2}$$

és tűzzük ki czélul a megoldhatóság kritériumainak és a megoldásoknak meghatározását ez esetben. Könnyen igazolható, hogy e kongruenczia-rendszer megoldhatóságának — azaz oly értékek létezésének, melyek az (1) és (2) kongruencziákat egyidejűleg kielégítik — szükséges és elegendő feltétele, hogy

$$a_1 \equiv a_2 \;\left(\mathrm{mod.}\; (n_1, n_2)\right),$$

azaz

$$a_1 \equiv a_2 \pmod{d_{12}} \tag{I}$$

legyen. Ugyanis az (1) kongruencziát kielégítő összes értékek

$$x = a_1 + n_1 t \tag{3}$$

alakkal birnak, a hol t tetszőleges egész számot jelent; a (3) alatt felirt értékek közül azok elégitik ki a (2) kongruencziát is, vagyis azok képezik problémánk megoldását, a melyekre nézve fennáll az

$$a_1 + n_1 t \equiv a_2 \pmod{n_2},$$

vagyis az

$$n_1 t \equiv a_2 - a_1 \pmod{n_2}$$

kongruenczia. E kongruenczia t-re akkor és csak akkor oldható meg, az (1) és (2) kongruencziáknak akkor és csak akkor vannak közös megoldásaik, ha

$$a_2 - a_1 \equiv 0 \pmod{d_{12}},$$

a mi a (I) feltétel.

Tegyük fel, hogy (I) teljesitve van; ekkor:

$$\frac{n_1}{d_{12}}\, t \equiv \frac{a_2 - a_1}{d_{12}} \left(\mathrm{mod.}\; \frac{n_2}{d_{12}}\right). \tag{4}$$

E kongruenczia megoldható, mert

$$\left(\frac{n_1}{d_{12}}, \frac{n_2}{d_{12}}\right) = 1.$$

A helyett azonban, hogy közvetlenül a (4) kongruencziából határoznók meg a t értékét, a megoldások symmetriája és a megoldási mód általánosíthatósága kedvéért oly

$$\frac{n_1}{d_{12}} y_2 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_2}{d_{12}}\right) \tag{5}$$

segédkongruencziát szerkesztünk, melynek gyöke ismeretéből a (4) megoldása is rögtön adódik.

Legyen ugyanis (5) egy megoldása y_2^0, ekkor:

$$t \equiv \frac{a_2 - a_1}{d_{12}} y_2^0, \quad \left(\text{mod. } \frac{n_2}{d_{12}}\right)$$

azaz

$$t = \frac{a_2 - a_1}{d_{12}} y_2^0 + \frac{n_2}{d_{12}} u,$$

hol u tetszésszerinti egész szám.

(3) most így írható:

$$x = a_1 + \frac{n_1}{d_{12}} y_2^0 (a_2 - a_1) + \frac{n_1 n_2}{d_{12}} u,$$

$$x = a_1 \left(1 - \frac{n_1}{d_{12}} y_2^0\right) + \frac{n_1}{d_{12}} y_2^0 a_2 + \frac{n_1 n_2}{d_{12}} u.$$

De y_2^0 az (5) gyöke lévén,

$$1 - \frac{n_1}{d_{12}} y_2^0 = \frac{n_2}{d_{12}} y_1^0,$$

hol y_1^0 az

$$\frac{n_2}{d_{12}} y_1 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{d_{12}}\right) \tag{6}$$

kongruenczia olyan gyöke, mely az

$$\frac{n_2}{d_{12}} y_1^0 + \frac{n_1}{d_{12}} y_2^0 = 1 \tag{6_1}$$

relácziónak eleget tesz.

Könnyen kimutatható, hogy az (5) és (6) kongruencziák gyökeiből végtelen sok olyan gyökpár alkotható, mely a (6_1) egyenlőséget kielégíti. Ha ugyanis (5) és (6) legkisebb nem negativ gyökét η_2, illetve η_1-vel jelöljük, akkor

$$y_1^0 = \eta_1 + t_1 \frac{n_1}{d_{12}}$$

és

$$y_2^0 = \eta_2 + t_2 \frac{n_2}{d_{12}},$$

hol t_1 és t_2 egész számok és igy a (6_1) reláczió t_1 és t_2 oly meghatározását követeli, hogy az

$$\frac{n_2}{d_{12}}\left(\eta_1 + t_1 \frac{n_1}{d_{12}}\right) + \frac{n_1}{d_{12}}\left(\eta_2 + t_2 \frac{n_2}{d_{12}}\right) = 1$$

vagyis az

$$\frac{n_1 n_2}{d_{12}^2} t_1 + \frac{n_1 n_2}{d_{12}^2} t_2 = 1 - \frac{n_2}{d_{12}} \eta_1 - \frac{n_1}{d_{12}} \eta_2 \tag{6_2}$$

reláczió ki legyen elégitve. y_1^0 és y_2^0-nak a (6_1) megkivánta módon való meghatározása végett tehát a (6_2) diophantikus egyenletet kell megoldani t_1 és t_2-re, de (6_2) megoldható, még pedig végtelen sok megoldással bir, mert a megoldhatóság szükséges és elegendő feltétele, az

$$1 - \frac{n_2}{d_{12}} \eta_1 - \frac{n_1}{d_{12}} \eta_2 \equiv 0 \quad \left(\text{mod.}\ \frac{n_1 n_2}{d_{12}^2}\right)$$

kongruenczia teljesitve van.

Az

$$1 - \frac{n_1}{d_{12}} y_2^0 = \frac{n_2}{d_{12}} y_1^0$$

egyenlőség felhasználásával x a következőkép irható:

$$x = \frac{n_2}{d_{12}} y_1^0 a_1 + \frac{n_1}{d_{12}} y_2^0 a_2 + \frac{n_1 n_2}{d_{12}} u.$$

Legyen

$$[n_1, n_2] = \frac{n_1 n_2}{d_{12}} = N; \quad \frac{n_2}{d_{12}} = \frac{N}{n_1} = N_1; \quad \frac{n_1}{d_{12}} = \frac{N}{n_2} = N_2.$$

Ily jelölések mellett az (1) és (2) kongruencziák közös megoldásait képező összes x értékeket a következő formula adja:

$$x = N_1 y_1^0 a_1 + N_2 y_2^0 a_2 + Nu. \tag{II}$$

Innen következik, hogy

$$x \equiv N_1 y_1^0 a_1 + N_2 y_2^0 a_2 \quad (\text{mod. } N), \qquad (\text{II}_1)$$

hol y_1^0 és y_2^0 az

$$N_1 y_1 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{d_{12}}\right)$$

$$N_2 y_2 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_2}{d_{12}}\right)$$

kongruencziák olyan gyökei, melyek az

$$N_1 y_1^0 + N_2 y_2^0 = 1$$

relácziót kielégítik.

3. Legyen már most a rendszerhez tartozó kongruencziák száma: három és a kongruencziák legyenek a következők:

$$x \equiv a_1 \quad (\text{mod. } n_1)$$
$$x \equiv a_2 \quad (\text{mod. } n_2)$$
$$x \equiv a_3 \quad (\text{mod. } n_3).$$

Az első két kongruencziára nézve a közös megoldások létezésének feltétele (I), maguk a feltételek teljesülése esetén adódó közös megoldások pedig (II) alatt vannak felírva. Világos, hogy a fentebbi három kongruenczia alkotta rendszer megoldásait a (II) alatt felirt értékek közül azok fogják szolgáltatni, a melyek az

$$N_1 y_1^0 a_1 + N_2 y_2^0 a_2 + Nu \equiv a_3 \quad (\text{mod. } n_3) \qquad (7)$$

kongruencziát kielégitik; e kongruenczia így is írható:

$$Nu \equiv a_3 - N_1 y_1^0 a_1 - N_2 y_2^0 a_2 \quad (\text{mod. } n_3) \qquad (7_1)$$

E lineár kongruencziából, a melynek megoldhatósága a kongruenczia-rendszer megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele, akkor és csak akkor nyerhető az u értéke, ha

$$a_3 - N_1 y_1^0 a_1 - N_2 y_2^0 a_2 \equiv 0. \quad \big(\text{mod. } (N, n_3)\big) \qquad (8)$$

Tekintetbe véve azt, hogy

$$(N, n_3) = ([n_1, n_2], n_3) = [d_{13}, d_{23}],$$ [1]

könnyen bebizonyíthatjuk, hogy e (8) alatti feltétel æquivalens az

$$a_1 \equiv a_3 \quad (\text{mod. } d_{13}) \qquad (\text{III})$$
$$a_2 \equiv a_3 \quad (\text{mod. } d_{23}) \qquad (\text{IV})$$

feltételekkel.

Tegyük fel e végből, hogy a (8) teljesítve van, ebből következik, hogy (III) és (IV) is fennáll; ugyanis (I) szerint

$$a_1 \equiv a_2 \quad (\text{mod. } d_{12})$$

lévén,

$$a_2 = a_1 + b_2 d_{12}$$

és

$$a_1 = a_2 + b_1 d_{12}.$$

Ezek alapján (8) így írható:

$$a_3 - a_1 (N_1 y_1^0 + N_2 y_2^0) - N_2 y_2^0 b_2 d_{12} \equiv 0, \quad (\text{mod. } [d_{13}, d_{23}])$$
$$a_3 - a_2 (N_2 y_2^0 + N_1 y_1^0) - N_1 y_1^0 b_1 d_{12} \equiv 0. \quad (\text{mod. } [d_{13}, d_{23}])$$

De (6_1) szerint

$$N_1 y_1^0 + N_2 y_2^0 = 1,$$

---

[1] Az $([n_1, n_2], n_3) = [d_{13}, d_{23}]$ reláczió a következőképen igazolható: Ha $p_1, p_2, \ldots, p_s$ amaz összes törzsszámok, melyek az n_1, n_2, n_3 számoknak legalább egyikében előfordulnak, akkor n_1, n_2, n_3 így állítható elő:

$$n_1 = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\alpha_k}; \qquad n_2 = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\beta_k}; \qquad n_3 = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\gamma_k},$$

hol α_k, β_k, γ_k nem negativ egész számokat jelentenek. Ha már most $M(a, b, c, \ldots)$, illetőleg $m(a, b, c, \ldots)$ symbolumokkal jelöljük az $a, b, c, \ldots$ számok maximumát, illetőleg minimumát, a verifikálandó reláczió így írható fel:

$$\prod_{k=1}^{s} p^{m(\gamma_k, M(\alpha_k, \beta_k))} = \prod_{k=1}^{s} p_k^{M(m(\alpha_k, \gamma_k), m(\beta_k, \gamma_k))}.$$

Ezen egyenlőség fennállására az egész számok törzstényezős előállításának egyértelműsége alapján szükséges és elegendő, hogy

$$m(\gamma_k, M(\alpha_k, \beta_k)) = M(m(\alpha_k, \gamma_k), m(\beta_k, \gamma_k))$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s)$$

egyenlőségek fennálljanak; hogy ezek valóban fennállanak a képzelhető esetek mindegyikében, azaz akkor is, ha $\gamma_k \leq M(\alpha_k, \beta_k)$ és akkor is, ha $\gamma_k > M(\alpha_k, \beta_k)$, az közvetlenül belátható.

tehát

$$a_3-a_1-N_2y_2^0b_2d_{12}\equiv 0, \quad (\text{mod. } [d_{13}, d_{23}])$$
$$a_3-a_2-N_1y_1^0b_1d_{12}\equiv 0. \quad (\text{mod. } [d_{13}, d_{23}])$$

E kongruencziák modulusának d_{13}, illetve d_{23} osztója, következésképp áll *a fortiori*, hogy

$$a_3-a_1-N_2y_2^0b_2d_{12}\equiv 0, \quad (\text{mod. } d_{13})$$
$$a_3-a_2-N_1y_1^0b_1d_{12}\equiv 0. \quad (\text{mod. } d_{23})$$

Ámde

$$N_2d_{12}=n_1\equiv 0, \quad (\text{mod. } d_{13})$$
$$N_1d_{12}=n_2\equiv 0, \quad (\text{mod. } d_{23})$$

tehát

$$a_3-a_1\equiv 0, \quad (\text{mod. } d_{13})$$
$$a_3-a_2\equiv 0, \quad (\text{mod. } d_{23})$$

a mi bizonyítandó volt.

Viszont, ha fennáll (III) és (IV), akkor fennáll a (8) is: (III) és (IV) fennállásából következik, hogy

$$a_3-N_1y_1^0a_1-N_2y_2^0a_2\equiv 0, \quad (\text{mod. } d_{13})$$
$$a_3-N_1y_1^0a_1-N_2y_2^0a_2\equiv 0, \quad (\text{mod. } d_{23})$$

tehát

$$a_3-N_1y_1^0a_1-N_2y_2^0a_2\equiv 0, \quad (\text{mod. } [d_{13}, d_{23}])$$

a mi éppen a (8) alatti kongruenczia.

Tegyük fel, hogy a (8), vagy a vele æquivalensnek bizonyult (III) és (IV) feltételpár teljesítve van; ekkor (7_1)-ből:

$$\frac{N}{[d_{13}, d_{23}]}\,u\equiv\frac{a_3-N_1y_1^0a_1-N_2y_2^0a_2}{[d_{13}, d_{23}]}\quad\left(\text{mod. } \frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]}\right)$$

Legyen y_3^0 az

$$\frac{N}{[d_{13}, d_{23}]}\,y_3\equiv 1\quad\left(\text{mod. } \frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]}\right) \tag{9}$$

kongruenczia egy megoldása. E feltevés mellett

$$u\equiv\frac{a_3-N_1y_1^0a_1-N_2y_2^0a_2}{[d_{13}, d_{23}]}\,y_3^0\quad\left(\text{mod. } \frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]}\right),$$

azaz

$$u=\frac{a_3-N_1y_1^0a_1-N_2y_2^0a_2}{[d_{13}, d_{23}]}\,y_3^0+\frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]}\,v,$$

hol v tetszőleges egész szám.

Helyettesítsük be u ezen értékét (II)-be:

$$x = a_1 N_1 y_1^0 \left(1 - \frac{N y_3^0}{[d_{13}, d_{23}]}\right) + a_2 N_2 y_2^0 \left(1 - \frac{N y_3^0}{[d_{13}, d_{23}]}\right) + \\ + \frac{N a_3 y_3^0}{[d_{13}, d_{23}]} + \frac{N n_3}{[d_{13}, d_{23}]} v,$$

(9)-ből következik, hogy

$$1 - \frac{N}{[d_{13}, d_{23}]} y_3^0 = q \cdot \frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]}, \tag{10}$$

hol q egész számot jelent, tehát e relláczió alapján:

$$x = N_1 y_1^0 a_1 q \frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]} + N_2 y_2^0 a_2 q \frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]} + \\ + \frac{N}{[d_{13}, d_{23}]} y_3^0 a_3 + \frac{N n_3}{[d_{13}, d_{23}]} v.$$

Legyen:

$$\frac{N n_3}{[d_{13}, d_{23}]} = \frac{N n_3}{(N, n_3)} = [N, n_3] = [[n_1, n_2], n_3] = [n_1, n_2, n_3] = \bar{N},$$

$$\frac{N_1 n_3}{[d_{13}, d_{23}]} = \frac{\bar{N}}{n_1} = \bar{N}_1; \qquad \frac{N_2 n_3}{[d_{13}, d_{23}]} = \frac{\bar{N}}{n_2} = \bar{N}_2;$$

$$\frac{N}{[d_{13}, d_{23}]} = \frac{\bar{N}}{n_3} = \bar{N}_3;$$

$$y_1^0 q = \bar{y}_1^0; \quad y_2^0 q = \bar{y}_2^0; \quad y_3^0 = \bar{y}_3^0.$$

Ily jelölések mellett:

$$x = \bar{N}_1 \bar{y}_1^0 a_1 + \bar{N}_2 \bar{y}_2^0 a_2 + \bar{N}_3 \bar{y}_3^0 a_3 + \bar{N} v, \tag{V}$$

vagyis

$$x \equiv \sum_{i=1}^{3} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 a_i, \quad (\text{mod. } \bar{N}) \tag{V$_1$}$$

a hol

$$\bar{N}_1 \bar{y}_1^0 \equiv 1, \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{[d_{12}, d_{13}]}\right)$$

$$\bar{N}_2 \bar{y}_2^0 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_2}{[d_{21}, d_{23}]}\right)$$

és

$$\bar{N}_3 \bar{y}_3^0 \equiv 1. \quad \left(\text{mod. } \frac{n_3}{[d_{13}, d_{23}]}\right)$$

E három segédkongruenczia közül az utolsó a (9) alatt felírttal azonos s mint ilyen, külön verifikáczióra nem szorul, míg az első kettő fennállását bizonyítanunk kell.

Könnyű belátni, hogy valóban

$$N_1\bar{y}_1^0 = N_1 y_1^0\left(1 - \frac{N y_3^0}{[d_{13}, d_{23}]}\right) \equiv 1, \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{[d_{12}, d_{13}]}\right)$$

mert egyrészt az

$$N_1 y_1^0 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{d_{12}}\right)$$

kongruencziából következik az is, hogy

$$N_1 y_1^0 \equiv 1, \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{[d_{12}, d_{13}]}\right)$$

másrészt pedig

$$\frac{N}{[d_{13}, d_{23}]} \equiv 0. \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{[d_{12}, d_{13}]}\right)$$

Hasonlókép igazolható, hogy

$$N_2\bar{y}_2^0 \equiv 1. \quad \left(\text{mod. } \frac{n_2}{[d_{21}, d_{23}]}\right)$$

Ki kell még emelnünk, hogy $\bar{y}_1^0$, $\bar{y}_2^0$, $\bar{y}_3^0$ az

$$N_1\bar{y}_1 \equiv 1, \quad \left(\text{mod. } \frac{n_1}{[d_{12}, d_{13}]}\right)$$

$$N_2\bar{y}_2 \equiv 1, \quad \left(\text{mod. } \frac{n_2}{[d_{12}, d_{23}]}\right)$$

illetve

$$N_3\bar{y}_3 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_3}{[d_{31}, d_{32}]}\right)$$

kongruencziának nem egészen tetszésszerinti, hanem olyan gyöke, hogy az

$$N_1\bar{y}_1^0 + N_2\bar{y}_2^0 + N_3\bar{y}_3^0 = 1$$

relácczió teljesítve van. E reláczió evidencziába lép, ha hivatkozunk arra, hogy

$$N_1\bar{y}_1^0 = N_1 y_1^0(1 - N_3\bar{y}_3^0)$$
$$N_2\bar{y}_2^0 = N_2 y_2^0(1 - N_3\bar{y}_3^0)$$

és

$$N_1 y_1^0 + N_2 y_2^0 = 1$$

volt.

4. Azon eredményekben, melyeket eddigi fejtegetéseink során a kongruenczia-rendszer megoldhatóságának kritériumait és magukat a megoldásokat illetőleg oly speczialis esetekre vonatkozólag nyertünk, a midőn a rendszerhez tartozó kongruencziák száma kettő és három volt, félreismerhetetlen törvényszerűség jelentkezik; ennek általános érvényességét óhajtván bebizonyitani, a teljes indukczió módszeréhez folyamodunk. *Felteszszük, hogy k számú kongruenczia alkotta rendszerre áll a törvényszerűség, melyet a megoldhatóság szükséges és elegendő feltételeit s a megoldásokat illetőleg két és három kongruencziából álló rendszereknél felismertünk, azaz felveszszük, hogy az*

$$x \equiv a_i \quad (\text{mod. } n_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

kongruenczia-rendszer megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy az

$$a_i \equiv a_j \quad (\text{mod. } d_{ij}) \qquad (i, j=1, 2, \ldots, k) \tag{F}$$

kongruenczia i és j jelzett összes értékei mellett fennálljon; felveszszük továbbá, hogy e feltételek teljesülése esetén az összes megoldások

$$x = \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 a_i + N z \tag{M}$$

alakkal birnak, hol z tetszésszerinti egész szám,

$$N = [n_1, n_2, \ldots, n_k],$$

$$N_i = \frac{N}{n_i}, \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, k) \tag{A}$$

és a hol $\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \ldots, \bar{y}_k^0$ az

$$N_i \bar{y}_i \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_i}{[d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{i,k}]}\right) \qquad (i=1, 2, \ldots, k) \tag{S_i}$$

kongruencziák oly szimultán gyökrendszere, mely a

$$\sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 = 1 \tag{T}$$

reláczionak eleget tesz.

E feltevések alapján ki fogjuk mutatni, hogy az

$$x \equiv a_i \pmod{n_i} \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,k,k+1)} \qquad (a)$$

$k+1$ kongruenczia alkotta rendszerre nézve is ugyanez a törvényszerűség áll fenn.

Mielőtt a most kitűzött irányban folytatnók vizsgálódásainkat, kivánatosnak látszik annak igazolása, hogy az (S_i) segédkongruencziáknak valóban található olyan gyökrendszere, a mely mellett (T) ki van elégítve. Mint látni fogjuk, ilyen gyökrendszer végtelen sok létezik.

Legyen:

$$\frac{n_i}{[d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{i,k}]} = \nu_i \qquad (B)$$
$${\scriptstyle (i=1,2,3,\ldots,k)}$$

és jelöljük az

$$N_i y_i \equiv 1 \pmod{\nu_i} \quad {\scriptstyle (i=1,2,3,\ldots,k)}$$

kongruencziák legkisebb nem negativ gyökeit η_i-vel; akkor, mint e kongruencziák minden más gyöke, a (T) relácziónak eleget tévő y_i^0 értékek is előállithatók, mint ez η_i gyököknek és a modulusok egész számú többszöröseinek összegei, azaz

$$y_i^0 = \eta_i + \nu_i t_i \quad {\scriptstyle (i=1,2,3,\ldots,k)} \qquad (a)$$

A $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_k^0$ gyökrendszer akkor és csak akkor elégíti ki a (T) relácziót, ha $t_1, t_2, \ldots, t_k$ úgy van meghatározva, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} N_i(\eta_i + \nu_i t_i) = 1, \qquad (b)$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{k} N_i \nu_i t_i = 1 - \sum_{i=1}^{k} N_i \eta_i. \qquad (b_1)$$

E határozatlan egyenletet kell $t_1, t_2, \ldots, t_k$-re megoldanunk, hogy $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_k^0$ értékét (a) alapján megkaphassuk; (b_1) azonban megoldható, mert, mint látni fogjuk a megoldásnak szükséges és elegendő feltétele, a mi kongruenczia alakjában így írható:

$$1-\sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i\eta_i \equiv 0, \quad \left(\text{mod. } (\bar{N}_1\nu_1, \bar{N}_2\nu_2, \ldots, \bar{N}_k\nu_k)\right) \tag{c}$$

teljesítve van.

Hogy e (c) kongruenczia fennállását bebizonyíthassuk, szükségünk lesz a következő oszthatósági tételekre: ha $\bar{N}_i$ és ν_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ az (A) és (B) jelzette módon vannak definiálva, akkor:

$$(\bar{N}_1\nu_1, \bar{N}_2\nu_2, \ldots, \bar{N}_k\nu_k) = \nu_1\nu_2\ldots\nu_k, \tag{d}$$

$$(\nu_i, \nu_l) = 1, \quad {\scriptstyle (i\neq l)} \tag{e}$$

$$(\bar{N}_i, \nu_l) = \nu_l). \quad {\scriptstyle (i\neq l)} \tag{f}$$

Mielőtt e relácziók verifikálását megkezdenők, jegyezzük meg, hogy (B) az 1. pont jegyzete szerint így is írható:

$$\nu_i = \frac{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \ldots, n_k]}{[n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_k]}.$$

Ha $p_1, p_2, \ldots, p_s$ az $n_1, n_2, \ldots, n_k$ modulusokban előforduló összes különböző törzsszámok, akkor n_i, $\bar{N}_i$, ν_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ így állítható elő:

$$n_i = p_1^{\alpha_i} p_2^{\beta_i} \ldots p_s^{\sigma_i} = \prod_{(p)} p_1^{\alpha_i},$$

$$\bar{N}_i = \prod_{(p)} p_1^{M(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)-\alpha_i},$$

$$\nu_i = \prod_{(p)} p_1^{M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k)-M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k)}.$$

Legyen rövidség kedvéért:

$$M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k) = M_0$$

és

$$M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k) = M_i;$$

ekkor (d), (e) és (f) így írhatók fel:

$$\prod_{(p)} p_1^{m(2M_0-\alpha_1-M_1, 2M_0-\alpha_2-M_2, \ldots, 2M_0-\alpha_k-M_k)} =$$

$$= \prod_{(p)} p_1^{kM_0-M_1-M_2-\cdots-M_k}, \tag{d_1}$$

$$\prod_{(p)} p_1^{m(M_0-M_i, M_0-M_l)} = \prod_{(p)} p_1^0 = 1, \quad {\scriptstyle (i\neq l)} \tag{e_1}$$

$$\prod_{(p)} p_1^{m(M_0-\alpha_i, M_0-M_l)} = \prod_{(p)} p_1^{M_0-M_l}. \quad {\scriptstyle (i\neq l)} \tag{f_1}$$

Az egész számok primtényezős előállításának egyértelműsége alapján a (d_1) reláczió fennállására szükséges és elegendő, hogy az

$$m(2M_0-a_1-M_1,\ 2M_0-a_2-M_2, \ldots, 2M_0-a_k-M_k) = \\ = kM_0-(M_1+M_2+\cdots+M_k) \qquad (d_2)$$

és az ehhez analog egyenlőségek — melyeket (d_2)-ből

$$a_{i'}(=)\beta_i, \ldots, a_i(=)\sigma_i$$

helyettesitésekkel kapunk meg — ki legyenek elégítve.

Azonban (d_2), mely így is irható:

$$2M_0-M(a_1+M_1,\ a_2+M_2, \ldots, a_k+M_k) = \\ = kM_0-(M_1+M_2+\cdots+M_k), \qquad (d_1^\star)$$

mindig ki van elégítve; ha ugyanis például

$$M_0 = a_{i_1}$$

és

$$M_{i_1} = a_{i_2},$$

akkor $(d_1^\star)$ baloldala, mivel

$$M_h = a_{i_1}, \qquad (h \neq i_1)$$

a következő:

$$2a_{i_1}-M(a_1+a_{i_1},\ a_2+a_{i_1}, \ldots, a_{i_1-1}+a_{i_1},\ a_{i_1}+ \\ + a_{i_2},\ a_{i_1+1}+a_{i_1}, \ldots, a_k+a_{i_1}) = \\ = 2a_{i_1}-a_{i_1}-M(a_1,\ a_2, \ldots, a_{i_1-1},\ a_{i_2},\ a_{i_1+1}, \ldots, a_k) = a_{i_1}-a_{i_2}.$$

A $(d_1^\star)$ jobb oldala:

$$ka_{i_1}-(k-1)a_{i_1}-a_{i_2} = a_{i_1}-a_{i_2},$$

tehát $(d_1^\star)$ tényleg fennáll (valamint az analog relácziók is), de akkor igaz a (d_1) és így a (d) alatti reláczió is.

A (e_1) fennállásához szükséges és elegendő az

$$m(M_0-M_i,\ M_0-M_l) = 0 \qquad (i \neq l) \qquad (e_2)$$

és az ehhez analog egyenlőségek teljesülése; de (e_2) így is irható:

$$M_0-M(M_i,\ M_l) = 0,$$

a minek igaz voltáról meggyőződünk, ha számba veszszük, hogy

$$M(M_i,\, M_l) = M\big(M(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k),$$
$$M(a_1, \ldots, a_{l-1}, a_{l+1}, \ldots, a_k)\big) = M(a_1, a_2, \ldots, a_k) = M_0.$$

Tehát igaz az (e_2) reláczió (az analogokkal együtt), a miből (e_1) és így (e) helyessége következik.

Az (f_1) reláczió fennállásához szükséges és elegendő az

$$m(M_0 - a_i,\, M_0 - M_l) = M_0 - M_l \qquad i \neq l \qquad (f_2)$$

és az ehhez analog egyenlőségek teljesülése.

(f_2) így is írható:

$$M_0 - M(a_i, M_l) = M_0 - M_l;$$

e reláczió azonban mindenképen igaz, mert $i \neq l$ lévén, M argumentumai között előfordul az a_i és így:

$$M_l \geqq a_i.$$

(f_2) és az analog relácziók helyes voltából következik (f_1) és így (f) helyessége is.

Az immár verifikált (d), (e), (f) relácziók alapján könnyen igazolható a (c) kongruenczia helyes volta; ugyanis (c) a (d) alapján æquivalens a következő kongruencziával:

$$1 - \sum_{i=1}^{k} N_i \eta_i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k) \qquad (g)$$

(g) pedig az (e) szerint a következő kongruenczia-rendszerrel æquivalens:

$$1 \equiv N_1\eta_1 + N_2\eta_2 + \cdots + N_k\eta_k. \quad (\mathrm{mod.}\ \nu_l) \quad {\scriptstyle (l=1,2,\ldots,k)}$$

E kongruenczia-rendszer helyes volta pedig világos abból, hogy (f) szerint

$$N_i \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ \nu_l) \qquad (i \neq l)$$

és az η_l definiczíója szerint

$$N_l \eta_l \equiv 1. \quad (\mathrm{mod.}\ \nu_l)$$

Ezzel teljes szigorúsággal bebizonyítottuk a (c) kongruenczia igaz voltát, vagyis a (b_1) diophantikus egyenlet megoldhatósága szükséges és elegendő feltételének teljesülését; e diophantikus egyenletünk megoldható lévén, végtelen sok megoldással bír, tehát végtelen sok módon választhatunk ki egy-egy gyököt az (S_i) kongruencziák gyökei közül úgy, hogy a nyert gyökrendszer a (T) relácziót kielégítse.

Ezek után térjünk át az (α) rendszer tárgyalására. Az (α) rendszerhez tartozó első k kongruenczia az (F) megoldhatósági feltételek teljesülése esetén az (M) alatt felírt végtelen sok (de modulo $\bar{N}$ egy számosztályba tartozó) közös megoldással bír.

Ezen végtelen sok érték közül azok elégítik ki az (α) rendszerhez tartozó utolsó kongrueneziát is, vagyis azok képezik az egész (α) rendszer megoldását, a melyekben z úgy van választva, hogy az

$$\bar{N}z + \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 a_i \equiv a_{k+1} \pmod{n_{k+1}} \qquad (\beta)$$

kongruenczia ki legyen elégítve.

Világos, hogy az (F) alatti feltételeken kívül még a (β) kongruenczia megoldhatósága a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az (α) rendszernek legyen megoldása.

(β) z-re akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$a_{k+1} \equiv \sum_{i=1}^{k} \bar{N} \bar{y}_i^0 a_i. \quad \left(\text{mod.}\,(\bar{N}, n_{k+1})\right) \qquad (\gamma)$$

Ha tekintettel vagyunk arra, hogy

$$\begin{aligned}(\bar{N}, n_{k+1}) &= ([n_1, n_2, \ldots, n_k], n_{k+1}) = \\ &= [d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}], \qquad (\delta)\end{aligned}$$

könnyen bebizonyíthatjuk, hogy a (γ) feltétel æquivalens a következővel:

$$a_{k+1} \equiv a_j \pmod{d_{j,k+1}} \quad (j=1,2,\ldots,k) \qquad (\varepsilon)$$

Tegyük fel e czélból, hogy (γ) teljesítve van; ebből (ε) fennállására következtethetünk; ugyanis (F) szerint

$$a_i \equiv a_j \pmod{d_{ij}}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

a mit így is írhatunk:

$$a_i = a_j + b_{ij} d_{ij}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

Következésképp:

$$a_{k+1} \equiv \sum_{i=1}^{k} (a_j + b_{ij} d_{ij}) \bar{N}_i \bar{y}_i^0, \qquad (\mathrm{mod.}\ (\bar{N}, n_{k+1}))$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

$$a_{k+1} \equiv a_j \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 + \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 b_{ij} d_{ij}, \qquad (\mathrm{mod.}\ (\bar{N}, n_{k+1}))$$

de (T) szerint

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 = 1$$

és (δ) szerint

$$(\bar{N}, n_{k+1}) = [d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{j,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}],$$

tehát

$$a_{k+1} \equiv a_j + \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 b_{ij} d_{ij}; \quad (\mathrm{mod.}\ [d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{j,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}])$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

$d_{j,k+1}$ e kongruenczia modulusának osztója lévén, áll *a fortiori*, hogy

$$a_{k+1} \equiv a_j + \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i d_{ij} b_{ij} \bar{y}_i^0. \qquad (\mathrm{mod.}\ d_{j,k+1})$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

Másrészt azonban:

$$\bar{N}_i d_{ij} = \frac{\bar{N}}{n_i} d_{ij} = \frac{[n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_k]\, d_{ij}}{n_i} \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod.}\ d_{j,k+1})$$

tehát

$$a_{k+1} \equiv a_j \pmod{d_{j,k+1}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

a mit bizonyítanunk kellett.

(ε) fennállása viszont maga után vonja (γ) teljesülését, mert (ε) fennállásából következik, hogy

$$a_{k+1} \equiv a_j + \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 b_{ij} d_{ij} \equiv \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_i \bar{y}_i^0 a_i, \qquad (\mathrm{mod.}\ d_{j,k+1})$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

tehát

$$a_{k+1} \equiv \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 a_i, \quad (\text{mod. } [d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}])$$

a mi éppen a (γ) alatti kongruenczia.

Tegyük már most fel, hogy a (γ) feltétel, vagy a vele æquivalensnek bizonyult (ε) feltételsorozat teljesítve van; ekkor (β) így írható:

$$\frac{N}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} z \equiv$$

$$\equiv \frac{a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 a_i}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} \cdot \left(\text{mod. } \frac{n_{k+1}}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]}\right)$$

Legyen $\bar{y}_{k+1}^0$ az

$$\frac{N}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} y_{k+1} \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_{k+1}}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]}\right) \quad (\eta)$$

kongruenczia egy megoldása.

E feltevés mellett:

$$z \equiv \frac{a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 a_i}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} \bar{y}_{k+1}^0$$

$$\left(\text{mod. } \frac{n_{k+1}}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]}\right)$$

azaz

$$z = \frac{a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 a_i}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} \bar{y}_{k+1}^0 +$$

$$+ \frac{n_{k+1} w}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]}.$$

Helyettesítsük be z itt talált értékét az (M) alatti formulába:

$$x = \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 a_i \left\{1 - \frac{N \bar{y}_{k+1}^0}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]}\right\} +$$

$$+ \frac{N \bar{y}_{k+1}^0 a_{k+1}}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} + \frac{N n_{k+1} w}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]},$$

hol w tetszésszerinti egész számot jelent.

(η)-ból következik, hogy

$$1 - \frac{N\bar{y}_{k+1}^0}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} = q \frac{n_{k+1}}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]},$$

hol q egész számot jelent, tehát

$$x = \sum_{i=1}^{k} N_i \bar{y}_i^0 q a_i \frac{n_{k+1}}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} +$$

$$+ \frac{N\bar{y}_{k+1}^0 a_{k+1}}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} + \frac{Nn_{k+1} w}{[d_{1,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]}.$$

Legyen:

$$\frac{Nn_{k+1}}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} = \frac{Nn_{k+1}}{(N, n_{k+1})} =$$

$$= [N, n_{k+1}] = [n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}] = N,$$

$$\frac{N_i n_{k+1}}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} = \frac{N}{n_i} = N_i, \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$\frac{N}{[d_{1,k+1}, d_{2,k+1}, \ldots, d_{k,k+1}]} = \frac{N}{n_{k+1}} = N_{k+1};$$

legyen továbbá

$$\bar{y}_i^0 q = y_i^0 \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

és

$$\bar{y}_{k+1}^0 = y_{k+1}^0.$$

Ezen jelölések mellett:

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} N_i y_i^0 a_i + Nw,$$

vagyis

$$x \equiv \sum_{i=1}^{k+1} N_i y_i^0 a_i, \qquad (\text{mod. } N)$$

a hol

$$N_i y_i^0 \equiv 1 \quad \left(\text{mod. } \frac{n_i}{[d_{i,1}, d_{i,2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{i,k}, d_{i,k+1}]}\right) \quad (C)$$
$$(i=1,2,\ldots,k,k+1)$$

Ha $i=k+1$, a (C) teljesitve van, (η)-val lévén azonos.

Ha $i=1, 2, \ldots, k$, a (C) fennállását külön be kell bizonyitanunk. Könnyű belátni, hogy i ez utóbbi értékei mellett is igaz a (C), mert egyrészt az

$$N_i\bar{y}_i^0 \equiv 1 \quad \left(\text{mod.}\ \frac{n_i}{[d_{i,1}, d_{i,2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{i,k}]}\right)$$

kongruencziából következik, hogy

$$N_i\bar{y}_i^0 \equiv 1, \quad \left(\text{mod.}\ \frac{n_i}{[d_{i,1}, d_{i,2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{i,k}, d_{i,k+1}]}\right)$$

másrészt pedig

$$N_{k+1} \equiv 0, \quad \left(\text{mod.}\ \frac{n_i}{[d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{i,k}, d_{i,k+1}]}\right)$$

míg

$$N_i y_i^0 = N_i\bar{y}_i^0 (1 - N_{k+1} y_{k+1}^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

volt; tehát a (C) kongruenczia igaz i ezen értékei mellett is.

Könnyen be lehet bizonyitani, hogy

$$y_1^0, y_2^0, \ldots, y_k^0, y_{k+1}^0$$

az

$$N_i y_i \equiv 1 \quad \left(\text{mod.}\ \frac{n_i}{[d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{i,i-1}, d_{i,i+1}, \ldots, d_{i,k}, d_{i,k+1}]}\right)$$
$$(i=1, 2, \ldots, k, k+1)$$

kongruencziáknak olyan gyökrendszere, mely a

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i y_i^0 = 1$$

relácziónak eleget tesz; ugyanis

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i y_i^0 = \sum_{i=1}^{k} \{N_i\bar{y}_i^0 (1 - N_{k+1} y_{k+1}^0)\} + N_{k+1} y_{k+1}^0,$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i y_i^0 = \sum_{i=1}^{k} N_i\bar{y}_i^0 - N_{k+1} y_{k+1}^0 \cdot \sum_{i=1}^{k} N_i\bar{y}_i^0 + N_{k+1} y_{k+1}^0;$$

de (T) szerint

$$\sum_{i=1}^{k} N_i\bar{y}_i^0 = 1,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{k+1} N_i y_i^0 = 1,$$

a mi bizonyitandó volt.

Íme: a tételsorozat, melyet k kongruenczia alkotta rendszerre igaznak tételeztünk fel, $k+1$ kongruencziából álló rendszerre is igaznak bizonyult; de igaz volt $k=2$ és $k=3$ esetében, tehát $k=4$, $k=5, \ldots$ esetében is igaz, vagyis általános érvényű.

Ha k-t r-rel választjuk egyenlőnek, e tételsorozat átmegy abba a tételsorozatba, melyet már előzetesen az 1. pontban a tárgyalt probléma megoldásának mondottunk és a melynek általános érvényességét a fentebbiekben bebizonyítottuk.

Fekete Mihály.

MEGOLDOTT FELADATOK.

33. *Legyen*

$$S_n = \Sigma (-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_m} \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_m-1)!}{x_1!\, x_2! \ldots x_m!},$$

a hol az összeadás az

$$x_1+2x_2+\cdots+mx_m = n$$

diophantusi egyenlet minden nem negativ számokból álló megoldására kiterjesztendő. Bizonyíttassék be, hogy $S_n = -\frac{1}{n}$, *ha* n m*-mel nem osztható és* $S_n = \frac{m}{n}$, *ha* n *osztható* m*-mel.*

(RADOS.)

Első megoldás dr. Kürschák József műegyetemi ny. r. tanártól.

Induljunk ki a következő m-szeres végtelen sornak vizsgálatából:

$$U(t) = \Sigma \frac{(x_1+x_2+\cdots+x_m)!}{x_1!\, x_2! \ldots x_m!} u_1^{x_1} u_2^{x_2} \ldots u_m^{x_m} t^{x_1+x_2+\cdots+x_m-1}, \quad (1)$$

hol az összegezésnél

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

helyébe rendre minden nem negativ, egész számokból alkotott értékrendszer teendő, kivévén az

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$$

értékrendszert. A t és az u-k független változók. E változók tartományát úgy akarjuk megszabni, hogy

$$|t| \leq 1, \quad |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m| < \vartheta,$$

hol ϑ egy tetszésszerint választható pozitiv valódi tört.

A t-nek és az u-knak szóban forgó értékeire nézve az (1) alatti sor föltétlenül összetartó. Hogy ezt belássuk, elegendő tagok abszolut értékeiből alkotott sorra nézve az összeadásnak egy bizonyos sorrendjénél az összetartást kimutatnunk. Ha az összeadásnál a t ugyanazon — mondjuk k-dik — hatványát tartalmazó tagokat összevonjuk, akkor e tagok összege a polinomiális tétel értelmében

$$|t|^{k-1}(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_m|)^k,$$

a mi kisebb, mint ϑ^k. Tehát ezen összevonás után az (1) alatti sor tagjainak abszolut értékeiből alkotott sor oly pozitiv tagú egyszerű sorba megy át, melynek tagjai rendre kisebbek a

$$\vartheta+\vartheta^2+\cdots+\vartheta^k+\cdots$$

összetartó sor megfelelő tagjainál. Az (1) alatti sor tagjainak abszolut értékeiből alkotott sor tehát valóban összetartó.

A mondottakból egyszersmind kitűnik, hogy

$$U(t)=\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}(u_1+u_2+\cdots+u_m)^k. \tag{2}$$

Most már az (1) alatti képletből

$$\int_0^{-1} U(t)\,dt=$$

$$=\sum(-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_m}\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_m-1)!}{x_1!\,x_2!\ldots x_m!}u_1^{x_1}u_2^{x_2}\ldots u_m^{x_m},$$

a (2) alatti képletből pedig

$$\int_0^{-1} U(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}(u_1+u_2+\cdots+u_m)^k=$$

$$=\mathrm{l.}\,(1+u_1+u_2+\cdots+u_m).$$

Tehát

$$\sum(-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_m}\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_m-1)!}{x_1!\,x_2!\ldots x_m!}u_1^{x_1}u_2^{x_2}\ldots u_m^{x_m}=$$

$$=\mathrm{l.}\,(1+u_1+u_2+\cdots+u_m). \tag{3}$$

Legyen most már

$$u_1=u,\quad u_2=u^2\ldots u_m=u^m.$$

Ha e helyettesítés után a (3) alatti egyenlet bal oldalán az u egyenlő hatványait tartalmazó tagokat összevonjuk, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n u^n$$

sort kapjuk, hol S_n a feladatban így jelölt összeget jelenti. A (3) alatti egyenlet jobb oldala ugyanezen helyettesítés után a következőbe megy át:

$$\text{l.}\,(1+u+u^2+\cdots+u_m)=\text{l.}\,\frac{1-u^{m+1}}{1-u}=\text{l.}\,(1-u^{m+1})-\text{l.}\,(1-u)=$$

$$=u^{m+1}+\frac{u^{2(m+1)}}{2}+\frac{u^{3(m+1)}}{3}+\cdots-\left(u+\frac{u}{2}+\frac{u^3}{3}+\cdots\right).$$

Tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n u^n = u^{m+1}+\frac{u^{2(m+1)}}{2}+\frac{u^{3(m+1)}}{3}+\cdots$$

$$-\left(u+\frac{u}{2}+\frac{u^3}{3}+\cdots\right). \qquad (1)$$

A két oldalon u^n együtthatóját összehasonlítván, épen a bebizonyítandó tételt nyerjük.

*

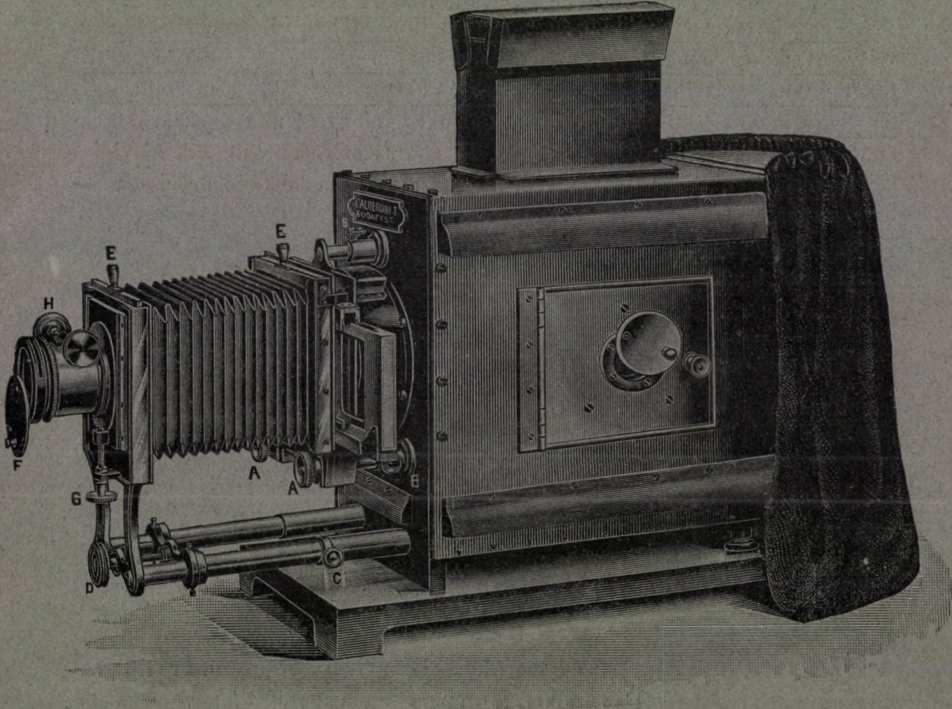
Ugyanezt a feladatot megoldotta még dr. Szabó Péter főgimnáziumi tanár úr is.

A cég alapíttatott 1819-ben. A tanszerraktár fennáll 1872 óta.

CALDERONI ÉS TÁRSA

Budapest, IV., Kishid-utcza 8.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometercsavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K 260.—

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.